

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LA VAR CONDITIONNELLE - APPROCHE COMPARATIVE :
APPLICATION SUR LE PRIX DU PÉTROLE

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
MOHAMED AMINE CHOUIREF

FÉVRIER 2016

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.07-2011). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord mes deux directeurs de recherche, Monsieur Alexandru Badescu et Monsieur Jean-Pierre Gueyie pour avoir cru en moi, m'avoir guidé, soutenu et encouragé tout au long de ce mémoire.

Que les professeurs, qui ont contribué à ma formation de près ou de loin et ont compris, accepté et toléré ma franchise, parfois excessive, voient ce travail leur être dédié aussi.

Je ne peux passer sous silence les efforts de l'analyste informatique et responsable du laboratoire informatique, Madame Gisèle Legault, qui m'a fourni une aide considérable et continue tout au long de ces années de maîtrise.

Un grand merci est également d'ordre pour Monsieur Olivier Collin pour ses conseils, son encouragement, et son dévouement inépuisable pour les étudiants du programme de deuxième cycle en mathématiques dont il est le directeur. Il me laissera le souvenir d'un enseignant et d'un responsable modèle très proche des étudiants et une source de motivation et de sagesse. Je souligne également l'apport de la très aimable et humaine, l'ex-secrétaire des programmes de cycles supérieurs en mathématiques, Madame Manon Gauthier. Sans oublier, bien entendu, l'implication respectable de Madame Isabella Couture, la secrétaire actuelle des programmes de cycles supérieurs en mathématiques.

À ma famille, à Nadine Pouliot, et à tous les gens qui m'ont supporté et aidé, de près ou de loin, vous avez tous, d'une façon ou d'une autre, apporté quelque chose à ce mémoire, et je vous en remercie.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	xi
RÉSUMÉ	xv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
MODÉLISATION DISCRÈTE DES SÉRIES FINANCIÈRES	3
1.1 Les tests de changements structurels et dates de rupture	5
1.1.1 Test de Chow de 1960	7
1.1.2 Tests de stabilité temporelle basés sur les résidus récurrents	10
1.1.3 Tests de stabilité temporelle basés sur les résidus MCO	13
1.1.4 Détermination des dates de rupture	14
1.2 Le processus ARIMA	16
1.2.1 Identification du modèle	17
1.2.2 Estimation des paramètres ARMA	19
1.2.3 Validation du modèle	20
1.2.4 Prévision du ARMA validé	23
1.3 Le processus GARCH	24
1.3.1 Test d'hétéroscédasticité conditionnelle	25
1.3.2 Estimation des paramètres ARMA-GARCH	26
1.3.3 Modèles GARCH et prévisions	28
CHAPITRE II	
LA VALEUR À RISQUE (VAR)	31
2.1 VaR Historique, Normale et Student non conditionnelle	32
2.2 VaR Historique, Normale et Student conditionnelle	33
2.3 Lien entre la théorie des valeurs extrêmes (EVT) et la VaR	34

2.3.1	La loi limite du maximum	35
2.3.2	Distribution généralisée des valeurs extrêmes	36
2.3.3	Approximation du point terminal	37
2.3.4	Distribution des excès et distribution de Pareto généralisée . .	38
2.3.5	Méthodes d'estimation de l'indice des queues	39
2.3.6	VaR-GPD non conditionnelle : Méthode POT	44
2.3.7	VaR-GPD conditionnelle	45
2.4	VaR de Cornish-Fisher	46
2.5	Technique numérique pour estimer la VaR	47
2.6	Backtesting et évaluation des modèles de VaR	47
2.6.1	Test de couverture non conditionnelle	50
2.6.2	Test d'indépendance	50
2.6.3	Test de couverture conditionnelle	52
2.6.4	Test de durée par GMM	54
CHAPITRE III		
ANALYSE EMPIRIQUE : APPLICATION SUR LE RENDEMENT DE LA SÉRIE WEST TEXAS INTERMEDIATE (WTI)		59
3.1	Analyse du changement structurel de la série des rendements	61
3.2	Modélisation ARMA de la série des rendements	67
3.3	Modélisation de la volatilité de la série des rendements	74
3.4	Détermination du nombre d'observations extrêmes de la série des rendements	76
3.5	Détermination du nombre d'observations extrêmes des résidus GARCH standardisés	79
3.6	Résultats de la violation de la VaR par les différentes méthodes	81
3.7	Résultats des tests de backtesting	86
CONCLUSION		91
ANNEXE A		
IDENTIFICATION DE L'ORDRE ARMA		93

ANNEXE B	
VALIDATION DU ARMA ET PRÉVISION	95
ANNEXE C	
MODÉLISATION DE LA VOLATILITÉ	103
ANNEXE D	
DÉTERMINATION DU NOMBRE D'OBSERVATIONS EXTRÊMES DE LA SÉRIE DES RENDEMENTS	105
ANNEXE E	
DÉTERMINATION DU NOMBRE D'OBSERVATIONS EXTRÊMES DES RÉSIDUS STANDARDISÉS	111
ANNEXE F	
RÉSULTATS DE LA VIOLATION DE LA VAR PAR LES DIFFÉRENTES MÉTHODES	117
ANNEXE G	
RÉSULTATS DES TESTS DE BACKTESTING	127
RÉFÉRENCES	135

LISTE DES TABLEAUX

3.1	Résultats des tests de changements structurels	61
3.2	Points et dates de rupture	62
3.3	Statistiques descriptives sur les rendements journaliers du WTI . .	64
3.4	Écart-type (%) journalier et annualisé de chaque période	66
3.5	Tests d'autocorrélation globale des résidus de la période 1	71
3.6	Choix du processus final pour chaque période	73
3.7	Résultats de l'estimation ARMA-ARCH de la période 1	76
3.8	Diagnostic du ARMA-ARCH de la période 1	76
3.9	Analyse de sensibilité à k de la $VaR^{GPD_{NC}}$	78
3.10	Statistiques descriptives des paramètres estimés de la $VaR^{GPD_{NC}}$.	79
3.11	Analyse de sensibilité à k de la VaR^{GPD_C}	80
3.12	Statistiques descriptives des paramètres estimés de la VaR^{GPD_C} . .	81
3.13	Ratio de violation de la VaR (en%) - Période 1 à 4	82
3.14	Tests de backtesting pour $\alpha = 5\%$ - Période 1	87
3.15	Tests de backtesting pour $\alpha = 1\%$ - Période 1	88
B.1	Tests d'autocorrélation globale des résidus - période 2	96

B.2	Tests d'autocorrélation globale des résidus - période 3	98
B.3	Tests d'autocorrélation globale des résidus - période 4	100
C.1	Résultats de l'estimation ARMA-ARCH - période 2 à 4	104
C.2	Diagnostic du ARMA-ARCH - période 2 à 4	104
D.1	Analyse de sensibilité à k de la $VaR^{GPD_{NC}}$ - Période 2 à 4	108
D.2	Statistiques descriptives des paramètres estimés de la $VaR^{GPD_{NC}}$ - Période 2 à 4	109
E.1	Analyse de sensibilité à k de la VaR^{GPD_C} - Période 2 à 4	113
E.2	Statistiques descriptives des paramètres estimés de la VaR^{GPD_C} - Période 2 à 4	114
G.1	Tests de backtesting pour $\alpha = 5\%$ - Période 2	128
G.2	Tests de backtesting pour $\alpha = 1\%$ - Période 2	129
G.3	Tests de backtesting pour $\alpha = 5\%$ - Période 3	130
G.4	Tests de backtesting pour $\alpha = 1\%$ - Période 3	131
G.5	Tests de backtesting pour $\alpha = 5\%$ - Période 4	132
G.6	Tests de backtesting pour $\alpha = 1\%$ - Période 4	133

LISTE DES FIGURES

1.1	Test CUSUM	12
1.2	Test OLS-CUSUM	14
2.1	VaR à partir de la densité/distribution des gains.	32
2.2	Lien entre les trois familles de la GEVd	36
2.3	Représentation de la GEVd pour $\zeta < 0$	36
2.4	Choix du seuil u	39
2.5	Fonction de survie d'une Pareto de 2^{nd} ordre	41
2.6	Graphique de Hill pour ζ	42
2.7	Graphique de Hill pour ι	42
2.8	Prévisions out-of-sample et estimation glissante	47
3.1	Prix journalier du pétrole brut WTI (\$US par baril)	60
3.2	Tests de changements structurels et points de rupture	61
3.3	La série du WTI à travers les régimes	62
3.4	Rendement du prix du WTI par régime	64
3.5	Écart-type (%) annualisé de toute la série	65
3.6	Boxplot sur les rendements - Période 1 à 4	65

3.7	Tests d'autocorrélation des rendements	67
3.8	Analyse des corrélogrammes de la série des rendements de la période 1	68
3.9	Corrélogrammes des résidus du ARMA($ 2 , 3 $) de la période 1	70
3.10	Corrélogrammes des résidus du ARMA($ 5 , 3 $) de la période 1	71
3.11	Tests d'autocorrélation des résidus de la période 1	72
3.12	Valeurs actuelles et prédites du rendement de la période 1	73
3.13	Analyse de la normalité des rendements	74
3.14	Analyse de la normalité des résidus ARMA($ 5 , 3 $)	75
3.15	Corrélogrammes des résidus au carré de la période 1	75
3.16	Analyse de la normalité des rendements sur la queue droite	77
3.17	Graphiques des excès et Hill de la série des rendements - période 1	78
3.18	Graphiques des excès et Hill des résidus standardisés - période 1	80
3.19	Violation de la VaR par la $VaR^{GPD_{NC}}$	83
3.20	Violation de la VaR par la VaR^{GPD_C}	84
3.21	Violation de la VaR par la VaR^{CN}	84
3.22	Violation de la VaR par la VaR^{CS_t}	84
3.23	Violation de la VaR par la VaR^{HF}	85
3.24	Violation de la VaR par la VaR^N	85
3.25	Violation de la VaR par la VaR^H	85

3.26 Violation de la VaR par la VaR^{CF}	86
A.1 Analyse des corrélogrammes de la série des rendements - période 2 .	93
A.2 Analyse des corrélogrammes de la série des rendements - période 3 .	94
A.3 Analyse des corrélogrammes de la série des rendements - période 4 .	94
B.1 Corrélogrammes des résidus du ARMA(0, 6) - période 2	95
B.2 Corrélogrammes des résidus du ARMA(6 ,0) - période 2	96
B.3 Tests d'autocorrélation des résidus - période 2	97
B.4 Corrélogrammes des résidus du ARMA(3 , 5) - période 3	97
B.5 Corrélogrammes des résidus du ARMA(5 , 3) - période 3	98
B.6 Tests d'autocorrélation des résidus - période 3	99
B.7 Corrélogrammes des résidus du ARMA(0, 15) - période 4	99
B.8 Corrélogrammes des résidus du ARMA(15 ,0) - période 4	100
B.9 Autocorrélation des résidus - période 4	101
B.10 Valeurs actuelles et prédites du rendement - période 2 à 4	102
C.1 Corrélogrammes des résidus au carré - période 2 à 4	103
D.1 Normalité des rendements sur la queue droite - Période 2 à 4 . . .	105
D.2 Fonction moyenne des excès des rendements - Période 2 à 4	106
D.3 Graphique de Hill des rendements - Période 2 à 4	107
E.1 Fonction moyenne des excès des résidus standardisés - Période 2 à 4	111

E.2	Graphique de Hill des résidus standardisés - Période 2 à 4	112
F.1	Violation de la VaR par la $VaR^{GPD_{NC}}$ - Période 2 à 4	118
F.2	Violation de la VaR par la VaR^{GPD_C} - Période 2 à 4	119
F.3	Violation de la VaR par la VaR^{CN} - Période 2 à 4	120
F.4	Violation de la VaR par la VaR^{CS_t} - Période 2 à 4	121
F.5	Violation de la VaR par la VaR^{HF} - Période 2 à 4	122
F.6	Violation de la VaR par la VaR^{NCN} - Période 2 à 4	123
F.7	Violation de la VaR par la VaR^H - Période 2 à 4	124
F.8	Violation de la VaR par la VaR^{CF} - Période 2 à 4	125

RÉSUMÉ

La valeur à risque (VaR) est désormais une mesure très importante de la gestion de risque. En faisant appel à la filtration GARCH, comme outil de modélisation de la volatilité, et à la théorie des valeurs extrêmes (EVT), pour prendre en compte les valeurs extrêmes dans la gestion de risque d'une série financière, cette mesure a connu des extensions qui ont contribué à la perfectionner.

Dans ce mémoire, nous simulons, par roulement, une prévision de la VaR pour une position courte puis longue dans le marché pétrolier, en appliquant les modèles EVT conditionnel et non conditionnel, et comparant leurs performances avec celles d'autres modèles connus tels que le modèle historique filtré, Cornish-Fisher, normal, historique,... Nous verrons que le modèle EVT conditionnel et le modèle historique filtré donnent de meilleurs résultats. Avec l'aide des tests de changements structurels, nous comparons les résultats obtenus par l'étude de la série entière avec ceux obtenus par les sous-séries périodiques. L'utilisation du modèle ARMA-GARCH à un retard sera critiqué en confrontant ses résultats avec ceux du modèle qui a suivi le processus classique de sélection de Box-Jenkins.

MOTS CLÉS : Tests de changements structurels, ARMA, GARCH, volatilité, théorie des valeurs extrêmes (EVT), fenêtre glissante (rolling window), VaR non conditionnelle, VaR conditionnelle, violation de la VaR, backtesting.

INTRODUCTION

La valeur à risque requiert de plus en plus l'intérêt des institutions financières. Elle est introduite dans différents types de risques financiers tel que : le risque de crédit (lié à la défaillance d'un emprunteur), le risque de marché (lié aux modifications sur la valeur d'une position), le risque de liquidité (lié au temps nécessaire pour éviter une perte), le risque opérationnel (lié aux défaillances internes) et le risque de modèle (lié à une modélisation qui ne coïncide pas avec la réalité).

Deux événements de régulation ont consolidé l'importance de mesurer le risque. Réunis en comité à la Banque des règlements internationaux à Bâle, en 1995, les représentants des banques centrales de dix grandes économies de l'Ouest ont proposé de nouvelles règles (amendant l'accord de Bâle de 1988), imposant aux établissements financiers un niveau de fonds propres proportionnel aux risques de marché. Adoptée en 1996, cette proposition a incité les banques à perfectionner leur système interne d'évaluation de la VaR, espérant ainsi un allègement des fonds propres qu'elles doivent détenir. Mais avant ça, en 1994, la banque américaine JP Morgan a rendu public son modèle de référence RiskMetrics d'estimation de la VaR d'un portefeuille.

Certes, pour se protéger contre une volatilité non prévisible des prix, il est important de bien la modéliser. La valeur à risque permet de savoir combien l'établissement financier peut perdre, avec une probabilité donnée, à un horizon de temps fixé. Elle tient sa popularité du fait de sa simplicité, puisqu'elle réduit le risque d'un portefeuille à un seul indice et la perte à une probabilité. Désormais, elle aide le gestionnaire de portefeuille à déterminer la politique de

gestion de risque la plus adéquate dépendamment de la situation.

Récemment, une nouvelle mesure de risque, la VaR conditionnelle, a remplacé la VaR traditionnelle qui comporte quelques anomalies. Elle combine la VaR non conditionnelle (historique, normale, Cornish-Fisher et quantile de la théorie des valeurs extrêmes) avec le modèle d'analyse de la volatilité des séries temporelles, le modèle GARCH. En utilisant une simulation par roulement (rolling window), ceci permettra d'avoir une mesure de risque qui prend mieux en compte la volatilité.

L'objectif principal de ce travail serait, donc, de comparer ces différentes approches pour déterminer laquelle est plus performante et l'ampleur des violations pour chacune. Pour évaluer ces différentes techniques de gestion de risque, on emploie des tests de validations (de couverture conditionnelle et non conditionnelle, ainsi que d'indépendance). Les résultats montrent que la VaR conditionnelle historique et la théorie des valeurs extrêmes conditionnelle améliorent considérablement la technique traditionnelle de la VaR non conditionnelle.

On verra aussi l'apport des tests de changements structurels pour réduire les clusters de volatilité d'une série temporelle de rendements, et on critiquera les résultats venant de l'utilisation par défaut d'un processus $AR(1)$ -GARCH(1,1) unique dans des études de prix similaires.

Ce mémoire sera organisé, donc, de la manière suivante. Dans un premier temps, on évoquera la modélisation des séries financières en mettant en évidence les tests de changements de régimes, les processus ARIMA et GARCH. Le deuxième chapitre présentera différentes techniques de modélisation et d'évaluation de la VaR avec une focalisation sur l'apport de la théorie des valeurs extrêmes. Enfin, à titre illustratif, on utilisera la série des rendements du prix du pétrole dans le dernier chapitre.

CHAPITRE I

MODÉLISATION DISCRÈTE DES SÉRIES FINANCIÈRES

La modélisation des séries financières est confrontée à un nombre de difficultés liées principalement à l'existence d'effets stylisés difficiles à reproduire techniquement à l'aide de modèles stochastiques. [Mandelbrot, 1963](#) a explicité une partie de ces effets qui ont été vérifiés puis complétés par la suite par un nombre d'auteurs. Ces effets apparaissent plus ou moins clairement dépendamment de la fréquence d'observation de la série et de sa nature. Nous nous intéressons ici aux séries à fréquence quotidienne, dont les effets stylisés sont les suivants :

- **Stationnarité et réversibilité temporelle** : Pour être stationnaire, une série temporelle doit conserver les mêmes caractéristiques probabilistes si on décale l'indice des temps. Puisque la trajectoire du prix p_t coïncide généralement à celle d'une marche aléatoire sans constante, l'analyse de la série, par la démarche de [Box, Jenkins et Reinsel, 1994](#), commence par la stationnariser. Une autre méthode serait plutôt de créer, à partir de la série du prix, une autre série sans racine unité (stationnaire) tel que le rendement $r_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$ ou son logarithme $\mu_t = \ln(1 + r_t) = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)$ dont les trajectoires coïncident avec la stationnarité de second ordre et qui facilitent l'étude de dépendance avec d'autres séries.

Aussi, une série stationnaire est réversible dans le temps si ses distributions de

dimensions finies restent inchangées en inversant le temps. Cette réversibilité temporelle implique la stationnarité mais le contraire n'est pas nécessairement vrai (voir Weiss, 1975).

- **Clusters de volatilité** : Empiriquement, on remarque que les grandes variations de rendements sont suivies généralement par des grandes variations et vice-versa. On assiste donc à des sous-périodes de fortes volatilité suivies, non périodiquement, de sous-périodes beaucoup plus calmes. Mais attention ceci ne signifie pas que la série des rendements ne suit pas un processus stationnaire (en particulier homoscédastique, c'est à dire à variance marginale constante). Pour ajouter plus de réalisme à l'étude de la série des rendements, une solution pour ce problème serait de diviser la série en sous-séries et étudier chacune à part. Le choix des points de changements dans la volatilité de la série se fera à partir de tests de changements structurels, comme on verra dans la section suivante. Une autre solution complémentaire serait d'adopter, on verra, un modèle GARCH ou un modèle GARCH avec changement de régime.

- **Autocorrélation des rendements et des rendements au carré** : Comme un bruit blanc, la série des rendements comprend généralement de très faibles autocorrélations (nous verrons que ce n'est pas toujours le cas), chose qui élimine l'hypothèse de marche aléatoire. Par contre, la série des carrés des rendements (ou des valeurs absolues des rendements) est souvent fortement autocorrélée. Cette propriété est compatible avec l'absence d'autocorrélation des rendements mais prouve que le bruit blanc est dépendant. C'est pourquoi il faut étudier le processus que prend le bruit blanc à travers des processus GARCH.

- **Normalité (conditionnelle et non conditionnelle) rejetée** : La normalité des rendements est généralement rejetée puisque les queues de la distribution empirique des rendements est généralement plus épaisse que celle d'une loi gaussienne. Une telle distribution est dite leptokurtique. Malgré la correction par un modèle GARCH, la distribution des résidus reste leptokurtique même si le

kurtosis est moins élevé que dans le cas non conditionnel et le Skewness négatif.

- **Effet de levier** : Il existe une asymétrie de l'impact des rendements passés positifs et négatifs sur la volatilité présente (voir [Black, 1976](#) et [Campbell et Hentschel, 1992](#)). Ainsi, les rendements négatifs engendrent une croissance de la volatilité supérieure à celle induite par des rendements positifs de même ampleur.

- **Saisonnalité** : Lorsque les marchés sont fermés (à cause d'un week-end ou une fête,...), la volatilité tend à augmenter reflétant l'information accumulée pendant cet arrêt.

Dans la suite de ce chapitre, nous verrons comment remédier à ces différentes propriétés.

1.1 Les tests de changements structurels et dates de rupture

La plupart des tests classiques, permettant de détecter les changements dans les coefficients d'un modèle de régression linéaire au cours du temps, supposaient qu'il y a juste un seul changement ou que le moment et le type de changement sont connus d'avance.

Plus récemment, les études accordent plus d'intérêt d'abord à chercher les dates de ces changements, s'il y a lieu, afin de discrétiser une série de données en sous-séries et étudier chacune de ces dernières indépendamment de l'autre, et aussi aux méthodes employées pour modéliser ces différents décalages (voir [Bai, 1997](#); [Hawkins, 2001](#); [Sullivan, 2002](#); [Bai et Perron, 2003](#), pour ne citer que quelques uns).

Soit, le modèle de régression linéaire suivant :

$$y_t = x_t' \beta_t + \xi_t, \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (1)$$

avec, au temps t :

$$\left\{ \begin{array}{l} - y_t : \text{Variable dépendante,} \\ - x'_t = (1, x_{t2}, \dots, x_{tk})' : \text{Vecteur des variables indépendantes,} \\ - \beta'_t = (\beta_{t1}, \beta_{t2}, \dots, \beta_{tk})' : \text{Vecteur des paramètres du modèle,} \\ - \xi_t : \text{résidus ou perturbations.} \end{array} \right.$$

Le test de changement structurel repose sur les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_0 : \beta_t = \beta, & \forall t = 1, \dots, T : \text{Pas de changement structurel.} \\ H_1 : \beta_t \neq \beta_{t'}, & \text{pour au moins un } t' \neq t : \text{Changement structurel.} \end{array} \right. \quad (2)$$

Si nous supposons que les paramètres du modèle se sont modifiés au cours du temps t , c'est à dire que si les valeurs des paramètres connaissent un décalage d'une région de régression stable à une autre, alors nous pouvons supposer qu'il existe m dates de rupture (ou date ou instant du changement) de stabilité. Par conséquent, nous pouvons dénombrer $m+1$ segments le long desquels le vecteur des paramètres β_t reste constant.

Les deux dernières hypothèses du modèle (1) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_0 : y_t = x'_t \beta_t + \xi_t, & t = 1, \dots, T, \\ H_1 : y_t = x'_t \beta_t^j + \xi_t, & t = T_{j-1} + 1, \dots, T_j, \text{ et } j = 1, \dots, m+1, \end{array} \right. \quad (3)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} - j : \text{Indice de segmentation,} \\ - \mathcal{I}_{m,T} = \{T_j, \forall j = 1, \dots, m\} : \text{L'ensemble des dates de rupture : m-partitions,} \\ - T_0 = 0, \\ - T_{m+1} = T. \end{array} \right.$$

Cependant, en pratique, les dates de rupture sont inconnues, il convient donc de les estimer.

Dans les sous-sections suivantes, nous allons voir quelques tests qui permettent

de détecter un changement de régime dans une série temporelle et les méthodes d'estimation des dates de rupture.

La logique globale de ce qui va suivre est valable sous quelques hypothèses assez générales sur le vecteur des variables explicatives x'_t de telle sorte que ce dernier doit, par exemple, être utilisé pour le théorème central-limite. Quelques hypothèses sur les perturbations ξ_t doivent être faites. Elles doivent satisfaire une des alternatives suivantes : soit ξ est une différence de martingales, soit ξ est indépendante de x qui est presque stationnaire, pour tout t (voir [Bai, 1997](#) et [Kramer, Ploberger et Alt, 1988](#)).

Comme nous venons de mentionner, la date de rupture peut être connue d'avance comme elle peut être inconnue. Elle est connue si nous voulons tester un changement structurel initié par une décision politique ou institutionnelle survenue dans une période de temps connue, par exemple une période de guerre,... Ou encore dépendamment de quelques événements exogènes spécifiques mais dont les changements se font seulement après un retard d'une durée indéterminée (inconnue), par exemple, le cas d'une économie ouverte, après un changement significatif sur la tarification ou la politique du taux de change,.. (voir [Andrews, 1993](#) ; [Andrews et Ploberger, 1994](#) et [Kuan et Hornik, 1995](#)).

Elle est inconnue si nous ne possédons aucune information, retardée avec durée inconnue ou précise, concernant la date du changement structurel.

Cependant, dépendamment de l'information disponible, nous distinguons plusieurs genres de tests de changement de régime.

1.1.1 Test de Chow de 1960

Appliqué sur une base temporelle, ce test exige la connaissance à priori d'une unique date de rupture. Il indique donc si les paramètres sont identiques avant et après cette date. Il impose une hypothèse au préalable sur la forme du changement structurel, selon un point de changement, $\delta \in [0, 1]$. Par conséquent, la date de

rupture, notée $T_\delta = \lfloor T\delta \rfloor$, dépend de la connaissance de δ et de sa forme.

$$\Rightarrow (2) \text{ devient : } H_1 : \beta_t = \begin{cases} \beta_t^1(\delta), & t = 1, \dots, T_\delta, \\ \beta_t^2(\delta), & t = T_\delta + 1, \dots, T. \end{cases}$$

Ceci est équivalent à poser $m=1$ dans le modèle (3).

$$\Rightarrow (3) \text{ devient : } H_1 : y_t = \begin{cases} x_t' \beta_t^1 + \xi_t, & t = 1, \dots, T_1, \\ x_t' \beta_t^2 + \xi_t, & t = T_1 + 1, \dots, T. \end{cases}$$

Dans le cas où δ est connu, nous pouvons faire appel au test de Wald, $W_T(\delta)$, du maximum de vraisemblance, $MV_T(\delta)$, ou le test du ratio de vraisemblance, $RV_T(\delta)$, pour tester les alternatives ci-dessus (voir [Andrews et Fair, 1988](#) dans le cadre d'un modèle non linéaire).

Cependant, dans le cadre d'un modèle linéaire, ces trois tests sont équivalents avec une même statistique F de Fisher-Snédecor. C'est le test de Chow.

[Chow, 1960](#) estime le modèle par MCO d'une part sur l'ensemble de la période T et d'autre part sur les deux sous-périodes $1, \dots, T_1$ puis $T_1 + 1, \dots, T$. La statistique du test est la suivante :

$$F_t^{cal} = \frac{(\hat{\xi}'\hat{\xi} - \hat{\xi}_t'\hat{\xi}_t) / [(T - k) - (T_1 - k) - (T - T_1 - k)]}{\hat{\xi}_t'\hat{\xi}_t / [(T_1 - k) + (T - T_1 - k)]} = \frac{(\hat{\xi}'\hat{\xi} - \hat{\xi}_t'\hat{\xi}_t) / k}{\hat{\xi}_t'\hat{\xi}_t / (T - 2k)},$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \hat{\xi}'\hat{\xi} : \text{SCR du modèle estimé avec les } T \text{ observations } (ddl = T - k), \\ - \hat{\xi}_1'\hat{\xi}_1 : \text{SCR de l'estimation sur la période } 1, \dots, T_1 \text{ } (ddl = T_1 - k), \\ - \hat{\xi}_2'\hat{\xi}_2 : \text{SCR de l'estimation sur la période } T_1 + 1, \dots, T \text{ } (ddl = T - T_1 - k), \\ - \hat{\xi}'\hat{\xi} = \hat{\xi}_1'\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2'\hat{\xi}_2 : ddl = T - 2k, \\ - \text{SCR : Somme des carrés des résidus.} \end{array} \right.$$

Si $F_t^{cal} > F_\alpha(k, T - 2k)$, alors l'hypothèse H_0 est rejetée et donc il existe un changement structurel.

Dans le cas où δ est inconnu (un paramètre), il convient de construire un test statistique qui ne prend pas le paramètre δ comme une donnée, car ce dernier

n'apparaît que dans l'hypothèse alternative et par conséquent les tests cités ci-haut ne possèdent pas leur distribution asymptotique échantillonnale.

Une solution, donc, serait d'utiliser des tests statistiques de la forme suivante (voir [Andrews, 1993](#) ; [Davies, 1977](#) ; [Davies, 1987](#) et [Hawkins, 1987](#)), entre autres :

$$\sup_{\delta \in \Delta} W_T(\delta) \quad , \quad \sup_{\delta \in \Delta} MV_T(\delta) \quad \text{et} \quad \sup_{\delta \in \Delta} RV_T(\delta)$$

où Δ : sous-ensemble de $[0, 1]$: ensemble de sécurité.

Généralement, nous considérons des tests statistiques de la forme :

$$g[W_T(\delta) \quad , \quad MV_T(\delta) \quad , \quad RV_T(\delta) \quad , \quad \text{avec} : \delta \in \Delta] .$$

g est une fonction continue quelconque telle que la fonction sup, la fonction moyenne ou exponentielle, dont la forme est $\int_{\Delta} f(W_T(\delta), \delta) d\lambda(\delta)$ (voir pour ce dernier cas [Andrews et Ploberger, 1992](#) et [Andrews et Ploberger, 1994](#)).

La statistique du test, dans ce cas aussi, suit une séquence de loi de F_t^{cal} pour chaque t , mais en changeant T_1 par T_δ de telle sorte que $t = T_\delta, \dots, T - T_\delta$ ($T_\delta \geq k$), c'est à dire que le changement s'effectue après un retard d'une durée inconnue (puisque δ est inconnu). H_0 est rejetée si la fonction g est très grande. [Hansen, 1997](#) a proposé un algorithme pour approximer asymptotiquement le p-value de ces tests.

Dans le cas où nous ne possédons aucune information, il faudra estimer les dates de rupture. Dans ce cadre, nous faisons appel à des tests de stabilité temporelle (ou tests de fluctuation généralisés). Ce genre de test cherche à capter la fluctuation dans les résidus ou alors dans les paramètres estimés.

La littérature regorge de ce type de tests (voir [Kuan et Hornik, 1995](#)) :

- **Tests basés sur les paramètres :**

- Test RE : Ce test compare les paramètres estimés récursifs avec les paramètres estimés de tout l'échantillon (voir [Sen, 1980](#) et [Ploberger, Kramer et Kontrus, 1989](#)).

- Test ME : Ce test compare les paramètres estimés mobiles avec les paramètres estimés de tout l'échantillon (voir [Chu, Hornik et Kuan, 1992a](#)).

- Tests basés sur les résidus :

- Test RE-CUSUM et test CUSUM of square : Ces deux tests sont basés sur les résidus récurrents et sont complémentaires (voir [Brown, Durbin et Evans, 1975](#) et [Durbin, 1969](#) pour ce qui concerne le deuxième test).

- Test OLS-CUSUM : Il est basé sur la somme cumulée des résidus de la régression par MCO (voir [Ploberger et Kramer, 1992](#)).

- Test RE-MOSUM : Il est basé sur la somme mobile des résidus récurrents (voir [Bauer et Hackl, 1978](#) et [Chu, Hornik et Kuan, 1992b](#)).

- Test OLS-MOSUM : Il est basé sur la somme mobile des résidus de la régression par MCO (voir [Chu, Hornik et Kuan, 1992b](#)).

Dans le cadre de ce papier, nous nous limiterons à discuter le test RE, RE-CUSUM et OLS-CUSUM.

1.1.2 Tests de stabilité temporelle basés sur les résidus récurrents

Dans le modèle (1), supposons que $\xi_t \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\forall t = 1, \dots, T$.

Les tests de stabilité temporelle, proposés par [Brown, Durbin et Evans, 1975](#), testent :

$$\begin{cases} H_0 : \beta_t = \beta \text{ et } \sigma_t^2 = \sigma^2, & \forall t = 1, \dots, T, \\ H_1 : \beta_t \neq \beta \text{ ou } \sigma_t^2 \neq \sigma^2, & \text{pour au moins un } t. \end{cases}$$

Afin de calculer les résidus récurrents du modèle, il convient d'estimer par MCO les paramètres avec un nombre d'observations qui varie de k à T .

Soit le modèle (1') suivant qui généralise le modèle (1) :

$$Y^r = X^r \beta^r + \xi^r, \quad \forall r = k + 1, \dots, T, \quad (1')$$

avec : $Y^r = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$, $X^r = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & x_{r2} & \dots & x_{rk} \end{pmatrix}$, $\beta^r = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$, $\xi^r = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_r \end{pmatrix}$.

L'erreur de prévision ex-post est donnée par :

$$e_r = y_r - \hat{y}_r = y_r - x_r' \hat{\beta}^{r-1},$$

avec : $\hat{\beta}^{r-1}$: L'estimateur par MCO du modèle (1') quand la taille de l'échantillon est égale à r-1.

Or, $H_0 : y_r = x_r' \beta_r + \xi_r$: L'hypothèse de stabilité

$$\implies e_r = x_r' \beta_r + \xi_r - x_r' \hat{\beta}^{r-1} = \xi_r - x_r' (\hat{\beta}^{r-1} - \beta_r).$$

Or l'espérance et la matrice de variance-covariance de $\hat{\beta}^{r-1}$ sont :

$$\begin{cases} - E(\hat{\beta}^{r-1}) = \beta^{r-1}, \\ - V(\hat{\beta}^{r-1}) = E[(\hat{\beta}^{r-1} - \beta^{r-1})(\hat{\beta}^{r-1} - \beta^{r-1})'] = \sigma^2 (X_{r-1}' X_{r-1})^{-1}. \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} - E(e_r) = 0, \\ - V(e_r) = \sigma_{e_r}^2 = \sigma^2 [1 + x_r' (X_{r-1}' X_{r-1})^{-1} x_r]. \end{cases}$$

Les résidus récurrents du test RE sont donnés par :

$$w_r = \frac{e_r}{\sqrt{1 + x_r' (X_{r-1}' X_{r-1})^{-1} x_r}}.$$

\implies Sous l'hypothèse de stabilité : $w_r \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\forall r = k+1, \dots, T$.

1.1.2.1 - Test RE-CUSUM :

Le test consiste à calculer la série cumulée des w_r :

$$W_r = \sum_{j=k+1}^r \frac{w_j}{\hat{\sigma}^2}, \quad \forall r = k+1, \dots, T,$$

avec : $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=k+1}^r (w_r - \bar{w})^2}{T-k-1}$, $\bar{w} = \frac{\sum_{j=k+1}^r w_r}{T-k}$.

Sous l'hypothèse de stabilité, W_r a une moyenne nulle et la région de confiance du test est donnée par :

$$P[-C_\alpha \leq W_r \leq C_\alpha] = 1 - \alpha,$$

avec : $C_\alpha = a(T-k)^{\frac{1}{2}} + 2a(r-k)(T-k)^{-\frac{1}{2}}$.

La valeur de a est une fonction de α , par exemple :

$$\text{Pour } \alpha = \begin{cases} 0.01 \\ 0.05 \\ 0.1 \end{cases} , \quad a = \begin{cases} 1.143 \\ 0.948 \\ 0.85 \end{cases} .$$

La figure 1.1, ci-dessous, facilite la lecture des résultats du test effectué pour chaque statistique $W_r, \forall r = k+1, \dots, T$. Il représente la série W_r à l'intérieur de son intervalle de confiance $[-C_\alpha, C_\alpha]$.

$$\text{Pour } r = \begin{cases} k \\ T \end{cases} , \quad C_\alpha = \begin{cases} a(T-k)^{\frac{1}{2}} \\ 3a(T-k)^{\frac{1}{2}} \end{cases} .$$

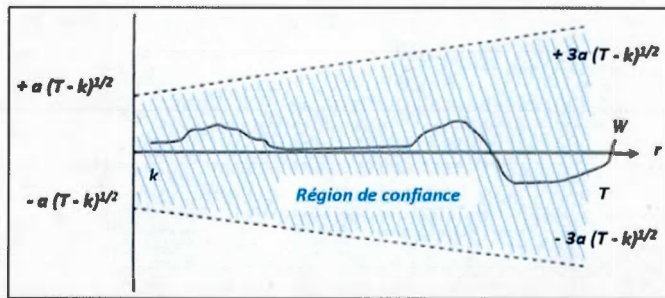


Figure 1.1 : Test CUSUM

Si W_r dépasse la région de confiance, à une date $r \in [k+1, T]$ donnée, alors l'hypothèse de stabilité des paramètres n'est pas retenue et nous considérons cette date comme une date de rupture.

Certes, l'approche récursive permet de déceler un point de rupture sans pour autant avoir au préalable une sous-période stable. L'inconvénient est qu'elle est incapable de distinguer entre un changement structurel de long terme et un autre de court terme. Ce sont les deux points de différence par rapport au test de Chow. Pour remédier à ces inconvénients, [Dufour, 1981](#) a proposé une interprétation du test prédictif de Chow en termes de variables binaires, puis [Dufour, 1982](#) s'est basé sur les résidus récurrents en eux-mêmes au lieu des graphiques CUSUM dans l'approche originale de [Brown, Durbin et Evans, 1975](#), ci-haut.

1.1.3 Tests de stabilité temporelle basés sur les résidus MCO

[Ploberger et Kramer, 1992](#) ont proposé une extension aux tests de [Brown, Durbin et Evans, 1975](#) en se basant sur les résidus estimés du modèle MCO plutôt que les résidus récurrents.

Reprenons le modèle (1), les résidus estimés du modèle MCO sont :

$$\hat{\xi}_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - x_t' \hat{\beta}, \quad \forall t = 1, \dots, T.$$

1.1.3.1 - Test OLS-CUSUM :

Le test consiste à calculer la série cumulée des résidus MCO :

$$W_T^0(t) = \frac{1}{\hat{\sigma} \sqrt{T}} \sum_{t=1}^{\lfloor Tt \rfloor} \hat{\xi}_t, \quad \forall t = 1, \dots, T,$$

avec :
$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^T \hat{\xi}_t^2}.$$

Si les résidus estimés sont iid selon une loi Gaussienne, la somme cumulée des erreurs estimées, comme il est décrit dans l'équation précédente, peut ainsi être assimilée à un mouvement brownien standard dans le cas d'un test CUSUM conventionnel (voir [El-Shagi et Giesen, 2013](#)). Dans le cas où c'est un test OLS-CUSUM, introduit par [Ploberger et Kramer, 1992](#), nous avons :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} W_T^0(t) = W^0(t),$$

avec :

$$\begin{cases} - W^0(t) = W(t) - tW(1) : \text{Pont brownien standard,} \\ - W(.) : \text{Mouvement brownien standard.} \end{cases}$$

Lors d'un décalage, le test enregistre un pic aux alentours du point de rupture. Nous rejetons à chaque fois que $W_T^0(t)$ traverse les deux lignes parallèles et symétriques qui décrivent les frontières de la région critique et la date de rupture est donnée par l'extremum de tous les pics enregistrés. En d'autres termes, à chaque fois que $\max_{1 \leq t \leq T} |W_T^0(t)|$ devient très large (voir [Schotman et Kramer, 1992](#)).

La figure 1.2, ci-dessous, illustre ceci.

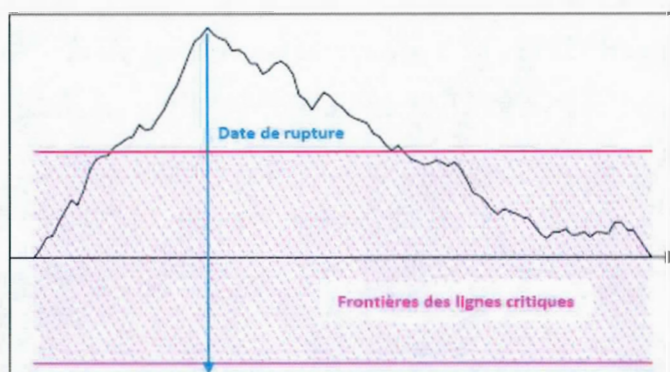


Figure 1.2 : Test OLS-CUSUM

Il est à remarquer que ce test est pareil au test RE, cité ci-haut, si le modèle (1) était un modèle de régression linéaire avec pour seul paramètre la constante β_{t1} , c'est à dire si :

$$y_t = \beta_{t1} + \xi_t, \quad \forall t = 1, \dots, T.$$

Tout ces tests représentent des critères à maximiser graphiquement.

1.1.4 Détermination des dates de rupture

Reprenons le modèle (3), la somme des carrés des résidus minimale totale (sur toute la période T) et résultante de l'estimation par MCO des paramètres β^j sur

chaque segment j donné par l'ensemble des m -partitions $\mathcal{I}_{m,T} = \{T_j, \forall j = 1, \dots, m\}$ est exprimée par :

$$SCR(\mathcal{I}_{m,T}) = \sum_{j=1}^{m+1} scr(T_{j-1} + 1, T_j),$$

avec : $scr(T_{j-1} + 1, T_j)$: Somme des carrés des résidus minimale sur le segment j .
Le problème de détermination des dates de rupture estimés, $\hat{T}_j, \forall j = 1, \dots, m$, revient à un problème de minimisation, sur chaque partition T_j , de la fonction objective suivante :

$$(\hat{T}_j, \forall j = 1, \dots, m) = \underset{(T_j, \forall j=1, \dots, m)}{argmin} SCR(\mathcal{I}_{m,T}), \quad T_j - T_{j-1} \geq T_\delta \geq k. \quad (4)$$

Le minimum global de (4) est obtenu à travers un lourd calcul sur une grille de recherche extensible d'ordre $\mathcal{O}(T^m)$ avec $m > 2$. Chose qui rend l'erreur d'estimation négligeable sur toute la période T mais hélas assez considérable, moyennement, sur chaque segment.

Pour cette fin, [Bai, 1997](#) et [Sullivan, 2002](#) ont proposé un algorithme hiérarchique de base qui consiste à un partitionner récursivement (ou assembler les sous-échantillons), sauf qu'il ne permet pas essentiellement d'avoir un minimum global. Alors que ce dernier peut être aisément trouvé en utilisant une programmation dynamique qui permet en plus de réduire l'erreur d'estimation à l'ordre $\mathcal{O}(T^2)$, $\forall m$. [Hawkins, 2001](#) a discuté ceci dans le cadre d'une estimation par maximum de vraisemblance.

Nous utiliserons par la suite un algorithme de programmation dynamique, pour un modèle de changement structurel dans le cadre d'une régression MCO, proposé par [Bai et Perron, 2003](#) dont l'idée principale satisfait la récurrence suivante :

$$SCR(\mathcal{I}_{m,T}) = \min_{mT_\delta \leq t \leq T-T_\delta} [SCR(\mathcal{I}_{m-1,t}) + scr(t+1, T)].$$

Il suffit donc de connaître pour chaque point t s'il est le dernier point de rupture dans l'ensemble $\mathcal{I}_{m,T}$ à partir de la matrice triangulaire :

$$scr(t, j) = scr(t, j - 1) + r(t, j)^2, \quad j - t \geq T_\delta,$$

avec : $r(t, j)$: les résidus récurrents au temps t du segment débutant à t .

Bai et Perron, 2003 ont parlé d'autres critères qui peuvent aider à déterminer les points de rupture, tels que les critères à minimiser, BIC (Bayesian Information Criterion) et AIC (Akaike Information Criterion), en mentionnant que ce dernier surestime toujours le nombre de points de rupture et qu'il est donc préférable d'utiliser le premier.

En pratique, différents papiers ont suggéré des outils computationnels pour tester et estimer les dates de rupture. Je cite : Zeileis, Leisch, Hornik et Kleiber, 2002 ; Zeileis, Kramer, Hornik et Kleiber, 2003,...

1.2 Le processus ARIMA

Étant donné que nous nous intéressons ici aux séries de rendements, nous allons considérer les processus stationnaires puisque, comme nous venons de dire, la série des rendements est généralement stationnaire. Wold, 1938, par son théorème fondamental dans la modélisation d'un processus stationnaire r_t , stipule la possibilité que r_t soit une combinaison linéaire de deux composantes :

$$r_t = D_t + S_t,$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} - D_t : \text{Composante déterministe,} \\ - S_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \xi_{t-i} : \text{Composante stochastique,} \\ - \xi_{t-i} : \text{Bruit blanc (c'est à dire de moyenne nulle,} \\ \quad \text{de variance constante et non autocorrélé).} \end{array} \right.$$

En particulier, nous allons nous intéresser au processus ARMA (AutoRegressive Moving Average) plutôt que les processus ARIMA (ARMA intégré).

Cependant, nous ne pouvons parler de ces processus sans évoquer [Box et Jenkins, 1970](#). Il convient donc de présenter leur procédure de quatre étapes :

- Identification du modèle,
- Estimation des paramètres,
- Validation du modèle,
- Prévission à l'aide du modèle validé.

Le modèle ARMA(p,q) est donné par :

$$r_t - \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} = \xi_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \xi_{t-j}, \quad \text{avec : } \xi_t \rightsquigarrow \mathcal{BB}(0, \sigma_\xi^2). \quad (5)$$

C'est une combinaison linéaire du processus AR(p) (AutoRegressive d'ordre p) et le processus MA(q) (Moving Average d'ordre q). Il est à remarquer que le processus MA(∞) est équivalent au processus $S = (S_t)$.

En introduisant un opérateur de retard, l'équation précédente s'écrit :

$$\Phi(L) r_t = \Theta(L) \xi_t, \quad \text{avec : } \begin{cases} - \Phi(L) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i, \\ - \Theta(L) = 1 - \sum_{j=1}^q \theta_j L^j. \end{cases}$$

Dans différents articles, les auteurs utilisent par défaut le modèle AR(1), MA(1) ou ARMA(1,1). Dans ce travail, nous critiquons cette démarche en vérifiant, plus tard dans la deuxième partie de ce travail, que les résultats trouvés par une identification adéquate du processus, qui représente le plus les données, sont différents de ceux trouvés par le processus par défaut.

1.2.1 Identification du modèle

Cette étape consiste à déterminer les ordres p et q du processus ARMA à travers la fonction d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle.

La fonction d'autocorrélation estimée est la suivante : $\hat{\rho}_h = \frac{\hat{\gamma}_h}{\hat{\gamma}_0}$, $h \in \mathcal{Z}$, avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} - h = 1, 2, \dots, K, \\ - K : \text{Nombre maximal de retards,} \\ - \hat{\gamma}_h = \text{cov}(r_t, r_{t+h}) = E[[r_t - E(r_t)][r_{t+h} - E(r_{t+h})]] = \frac{\sum_{t=1}^{T-h} (r_t - \bar{r})(r_{t+h} - \bar{r})}{T}, \\ - \hat{\gamma}_0 = \text{cov}(r_t, r_t) = V(r_t) = E[[r_t - E(r_t)]^2] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2, \\ - |\gamma_h| \leq \gamma_0 \quad , \quad |\rho_h| \leq \rho_0, \\ - \gamma_h = \gamma_{-h} \quad , \quad \rho_h = \rho_{-h} : \text{Fonctions paires,} \\ - \rho_0 = 1. \end{array} \right.$$

Une fois $\hat{\rho}_h$ évaluée, nous déterminons l'ordre q du processus MA en estimant la significativité de chacun par l'écart-type de Bartlett :

$$\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_h} = \left[\frac{1}{T} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{h-1} \hat{\rho}_i^2 \right) \right]^{1/2}.$$

La statistique du test suit une statistique de Student tel que : $t_{\hat{\rho}_h} = \frac{\hat{\rho}_h}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_h}}$.

La règle de décision est :

- Si $|t_{\hat{\rho}_h}| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, on ne rejette pas $H_0 : \rho_h$ n'est pas significatif,
- Si $|t_{\hat{\rho}_h}| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, on rejette $H_0 : \rho_h$ est significativement différent de 0.

La fonction d'autocorrélation partielle est donnée par $\psi_{hh} = \frac{|M_h^*|}{|M_h|}$, avec :

$$M_h = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{h-2} & \rho_{h-1} \\ & 1 & & & . \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & . \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad M_h^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{h-2} & \rho_1 \\ . & 1 & & & . \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ . & & & 1 & . \\ \rho_{h-1} & & & & \rho_h \end{pmatrix}.$$

Pour calculer ψ_{hh} , [Durbin, 1960](#) a créé l'algorithme suivant, basé sur les équations de Yule-Walker :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi_{ii} = \begin{cases} \rho_1, & \text{si } i = 1, \\ \frac{\rho_i - \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{i-1,j} \rho_{i-j}}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{i-1,j} \rho_j}, & \text{si } i = 2, \dots, h, \end{cases} \\ \psi_{ij} = \psi_{i-1,j} - \psi_{ii} \psi_{i-1,i-j}, & \text{si } i = 2, \dots, h \text{ et } j = 1, \dots, i-1. \end{array} \right.$$

Pour un T grand, $\psi_{hh} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{T})$. Il est donc possible de déterminer l'ordre p du processus AR à partir du test précédent mais pour une statistique différente :

$$t_{\hat{\psi}_{hh}} = \frac{\hat{\psi}_{hh}}{(1/T)^{1/2}} \text{ (voir Quenouille, 1949).}$$

Les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle sont représentées chacune dans un graphique appelé corrélogramme.

L'identification terminée, nous pouvons, par la suite, passer à l'étape suivante d'estimation du(des) processus ARMA(p, q) sélectionné(s).

1.2.2 Estimation des paramètres ARMA

En supposant que $\xi \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2)$, l'estimation des paramètres repose sur la méthode de maximum de vraisemblance dont le log est donné par :

$$l_T = -\frac{T}{2} \log(2\Pi) - \frac{T}{2} \log(\sigma_\xi^2) - \frac{1}{2} \log(|Z'Z|) - \frac{S(\phi, \theta)}{2\sigma_\xi^2},$$

avec :

$$\begin{cases} - Z : \text{Matrice de taille } (p+q+T, p+q) \text{ contenant les} \\ \quad \text{paramètres } \phi_i \ (i=1, \dots, p) \text{ et } \theta_j \ (j=1, \dots, q), \\ - S(\phi, \theta) = \sum_{t=-\infty}^T (E[\xi_t | r_t, \phi_i, \theta_j, \sigma_\xi^2])^2. \end{cases}$$

Nous maximisons l_T par rapport aux paramètres ϕ_i, θ_j et σ_ξ^2 , en commençant par la dernière car elle ne dépend que de t et non de i et j . Nous aurons :

$$\frac{\partial l_T}{\partial \sigma_\xi^2} = 0 \iff -\frac{T}{2\sigma_\xi^2} + \frac{S(\phi, \theta)}{2\sigma_\xi^4} \iff \hat{\sigma}_\xi^2 = \frac{S(\phi, \theta)}{T}.$$

En introduisant la valeur de $\hat{\sigma}_\xi^2$, l_T devient :

$$l_T = -\frac{T}{2} \log(2\Pi) - \frac{T}{2} \log\left(\frac{S(\phi, \theta)}{T}\right) - \frac{1}{2} \log(|Z'Z|) - \frac{T}{2}.$$

Maximiser la nouvelle expression de l_T revient à minimiser cette expression :

$$l_T^* = T \log\left(\frac{S(\phi, \theta)}{T}\right) + \log(|Z'Z|).$$

Cette minimisation peut se faire par des méthodes numériques ou par un recours aux modèles de moindres carrés (voir Gouriéroux et Monfort, 1995).

Nous procédons, maintenant, à la validation du(des) processus $ARMA(p,q)$ estimé(s) en nous focalisant sur trois genres de tests complémentaires (le test de significativité individuel sur les paramètres, le test Box-Pierce sur les résidus et les tests de normalité sur les résidus).

1.2.3 Validation du modèle

1.2.3.1 Test de significativité individuel sur les paramètres

Nous faisons ce test pour chaque processus $ARMA(p,q)$ sélectionné puis estimé.

Soit, $p' < p$, le test se base sur les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} - H_0 : \phi_i = 0 : p' \neq p \text{ et } q' = q : ARMA(p', q), \\ - H_1 : \phi_i \neq 0 : p' = p \text{ et } q' = q : ARMA(p, q). \end{cases}$$

La statistique du test est : $t_{\hat{\phi}_i} = \frac{\hat{\phi}_i}{\hat{\sigma}_{\phi_i}}.$

La règle de décision est :

- Si $|t_{\hat{\phi}_i}| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, on ne rejette pas $H_0 : \phi_i$ n'est pas significatif,
- Si $|t_{\hat{\phi}_i}| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, on rejette $H_0 : \phi_i$ est significativement différent de 0.

Remarques :

- 1- Le même type de test est fait pour les paramètres θ_j ,
- 2- Nous ne pouvons tester simultanément $p' \neq p$ et $q' \neq q$ car tout processus qui admet une représentation $ARMA(p, q)$ admet, aussi, une représentation $ARMA(p', q')$ car, pour un paramètre τ , nous avons :

$$\Phi(L) r_t_{ARMA(p,q)} = \Theta(L) \xi_t \iff \Phi(L) (1 - \tau) r_t_{ARMA(p-1, q-1)} = \Theta(L) (1 - \tau) \xi_t.$$

Cependant, le test sera biaisé si le résidu du processus n'est pas un bruit blanc (\mathcal{BB}). Il faut donc déterminer ceci en faisant le corrélogramme et les tests d'absence d'autocorrélation (tests portemanteau) sur le terme d'erreur.

1.2.3.2 Test Box-Pierce sur les résidus

Il existe un grand nombre de tests portemanteau, les plus connus sont ceux de Box et Pierce, 1970 ; Ljung et Box, 1978 et Durbin et Watson, 1950, 1951. Dans le cadre de ce mémoire, nous n'allons nous intéresser qu'au premier car la série visée est de grande taille. En effet, la statistique du test de Ljung-Box est plus proche de celle du Khi-deux seulement quand l'échantillon est petit et celui de Durbin-Watson s'applique juste pour un ordre $h = 1$.

Le test se base sur les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} - H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_K = 0 : \xi_t \rightsquigarrow BB, \\ - H_1 : \exists \rho_h \neq 0 : \xi_t \not\rightsquigarrow BB. \end{array} \right.$$

La statistique du test est la suivante : $Q = T \sum_{h=1}^K \hat{\rho}_h^2$.

La règle de décision est : Si $Q < \chi^2(K - p - q)$, on ne rejette pas $H_0 : \xi_t \rightsquigarrow BB$.

Si le corrélogramme indique qu'il y a des corrélations significatives entre les résidus, et que ceci est confirmé par un test Box-Pierce significatif, c'est à dire qu'on rejette H_0 , le résidu n'est pas considéré un BB et donc nous concluons que le test sur les paramètres précédents est biaisé pour ce qui concerne ce processus. Nous devons, par conséquent, l'éliminer. Cette démarche est faite pour tous les processus estimés.

1.2.3.3 Tests de normalité sur les résidus

Après avoir testé si le résidu suit un BB , il convient ensuite de voir si c'est un BB gaussien.

- Test du Skewness et du Kurtosis :

Le Skewness et le Kurtosis mesurent, respectivement, l'asymétrie et l'aplatissement de la distribution de la série de rendements.

Soit $\mu_h = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^h$: le moment centré d'ordre h . Les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement sont, respectivement, égaux à :

$$s^{1/2} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}, \quad k = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}.$$

L'hypothèse des tests est :

$$H_0 : s^{1/2} = 0 \text{ (Symétrie)}, \quad k = 3 \text{ (Aplatissement)} : \text{Normalité des résidus.}$$

Nous pouvons aussi donner une extension aux tests en supposant la normalité des coefficients ci-haut et pour $n > 30$, les statistiques deviennent :

$$\nu_1 = \frac{|s^{1/2} - 0|}{\sqrt{\frac{6}{T}}}, \quad \nu_2 = \frac{|k - 3|}{\sqrt{\frac{24}{T}}}.$$

L'hypothèse des tests devient : $H_0 : \nu_1 = 0, \nu_2 = 0$: Normalité des résidus.

Si $\nu_1 \leq 1.96$ et $\nu_2 \leq 1.96$, on ne rejette pas H_0 .

- Test de Jarque-Bera :

Il intègre les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement précédents dans la mesure suivante :

$$JB = \frac{T}{6}s + \frac{T}{24}(k - 3)^2.$$

Si $JB \leq \chi_{1-\alpha}^2(2)$, on ne rejette pas H_0 de normalité des résidus au seuil α .

Ces tests de normalité servent également à savoir si nous avons une hétéroscédasticité des erreurs. En effet, l'hétéroscédasticité se manifeste sur le graphe de la distribution par des queues de probabilité plus épaisses (Leptokurtique) que les queues de la loi normale.

1.2.3.4 Critères de choix de modèles

Outre les critères standards de choix tels que l'erreur absolue moyenne, la racine de l'erreur quadratique moyenne et l'écart absolu moyen, nous avons opté ici pour des critères d'informations (voir [De Gooijer, 1985](#)), tels que : le critère d'[Akaike, 1969, 1973, 1974](#) (AIC), le log-vraisemblance (LL), le critère bayésien d'[Akaike,](#)

1977 ou de Schwarz, 1978 (BIC) et encore le critère de Hannan et Quinn, 1979 (HQ). Contrairement à LL, ce sont des critères à minimiser. Nous discuterons, dans ce papier, des deux premiers car ils sont les plus utilisés malgré que Hannan, 1980 a montré que seuls les processus déduits des critères BIC et HQ ont des estimateurs convergents et conduisent à une sélection asymptotiquement correcte du modèle.

La statistique AIC s'écrit : $AIC = Ln(\hat{\sigma}_\xi^2) + \frac{2(p+q)}{T}$.

Une alternative serait de calculer le test de ratio de vraisemblance pour un modèle contraint et non contraint.

La statistique du test est définie de la sorte : $LR = 2[l(\hat{\Gamma}) - l(\tilde{\Gamma})]$,

où :

$$\begin{cases} - \hat{\Gamma} : \text{Paramètres du modèle non contraint,} \\ - \tilde{\Gamma} : \text{Paramètres du modèle contraint,} \\ - l(\hat{\Gamma}) : \text{Estimateur du log-vraisemblance du modèle non contraint,} \\ - l(\tilde{\Gamma}) : \text{Estimateur du log-vraisemblance du modèle contraint.} \end{cases}$$

Si $LR < \chi_{1-\alpha}^2(1)$, on ne rejette pas H_0 c'est à dire le modèle contraint.

Une fois que le processus est retenu, l'étape de validation s'achève.

1.2.4 Prédiction du ARMA validé

Reprenons le processus ARMA(p,q) donné par la relation (5). On note $r_{t+h|t}$ la prédiction de r_t pour un horizon h sachant l'information à la date t.

Pour évaluer la qualité d'une prédiction, nous avons besoin d'une métrique, en d'autres mots, d'une fonction de perte. Nous allons utiliser une fonction quadratique. Nous cherchons donc la prédiction qui minimise l'erreur quadratique moyenne :

$$EQM = E[(r_{t+h} - r_{t+h|t})^2].$$

Nous pouvons, donc, aisément montrer que la prévision optimale \hat{r}_{t+h} peut s'écrire sous forme d'une espérance conditionnelle :

$$\hat{r}_{t+h} = r_{t+h|t} = E[r_{t+h}|I_t] = E_t[r_{t+h}],$$

avec : $I_t = \{r_1, r_2, \dots, r_t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t\}$: L'information disponible à la date t .

L'intervalle de prévision, au seuil α et à l'horizon h , est donné par :

$$\hat{r}_{t+h} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} EQM^{1/2}, \quad \text{où : } z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

1.3 Le processus GARCH

Le processus ARMA a permis d'avoir une prévision des rendements à partir d'une modélisation supposée linéaire. Bien que cette hypothèse rend ces processus avantageusement simples à mettre en oeuvre, elle constitue néanmoins une hypothèse forte puisque la formulation linéaire restreint automatiquement le type de dynamiques non linéaires possibles et particulièrement complexes des marchés financiers. La source de non linéarité peut provenir de la moyenne de la série, en particulier des phénomènes d'asymétrie et de rupture de forte amplitude dont nous avons parlé brièvement quand nous avons défini les tests de changements structurels. Elle peut provenir aussi de la variance, en particulier, des quelques anomalies citées au début de ce chapitre notamment les regroupements de volatilité (les clusters de volatilité) qui se manifestent sur les queues de la distribution leptokurtique des résidus du modèle ARMA. Par la suite, nous allons juste nous intéresser à la non linéarité en variance à l'aide des modèles GARCH qui permettent à la variance d'une série de dépendre de l'information disponible, et notamment du temps.

Introduits par [Engle, 1982](#) et généralisés par [Bollerslev, 1986](#), le processus GARCH(M,N) fort, noté ξ , vérifie :

$$\begin{cases} \xi_t = \sigma_t \eta_t, \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{n=1}^N \alpha_n \xi_{t-n}^2 + \sum_{m=1}^M \beta_m \sigma_{t-m}^2, \end{cases}$$

$$\text{où : } \left\{ \begin{array}{l} - \xi_t : \text{Résidu du processus ARMA}(p,q), \\ - \omega, \alpha_n, \beta_m : \text{Des paramètres positifs,} \\ - \eta_t : \text{Loi de probabilité d'espérance nulle et de variance unitaire,} \\ - E(\xi_t | \xi_u, u < t) = 0, \quad t \in \mathbb{Z}, \\ - V(\xi_t | \xi_u, u < t) = \sigma_t^2 : \text{Variance conditionnelle du processus } \xi. \end{array} \right.$$

En combinant les deux équations, en remplaçant ξ_t^2 par son expression, nous aurons :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{y=1}^Y a_y (\eta_{t-y}) \sigma_{t-y}^2,$$

$$\text{où : } a_y(x) = \alpha_y x^2 + \beta_y, \quad y = 1, \dots, Y = \max(M, N).$$

Cette représentation montre que dans le cas d'un GARCH fort, le processus de volatilité vérifie une équation autoregressive, mais avec coefficients aléatoires.

Plusieurs travaux et extensions concernant ce processus ont été développés dans la littérature, mais nous n'allons utiliser, dans ce papier, que le processus GARCH fort. L'identification des ordres M et N suit la même procédure que celle des modèles ARMA, à travers, respectivement, le corrélogramme des autocorrélations et celui de l'autocorrélation partielle, mais de ξ_t^2 et non de ξ_t .

De même pour l'étude de l'autocorrélation et l'autocorrélation partielle du processus GARCH se fait à partir des corrélogrammes de la série des ξ_t^2 . Si l'étude de la normalité des résidus indique une distribution non normale, il est possible d'avoir de l'hétéroscédasticité incrustée dans les queues de la distribution. Il convient donc de la tester.

1.3.1 Test d'hétéroscédasticité conditionnelle

En récapitulant, nous considérons le processus suivant dont l'équation de la moyenne est décrite par un processus ARMA :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(L) r_t = \Theta(L) \xi_t, \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{n=1}^N \alpha_n \xi_{t-n}^2. \end{array} \right.$$

Pour étudier son hétéroscédasticité conditionnelle, nous pouvons utiliser, graphiquement, les deux corrélogrammes des résidus au carré de la série GARCH(M,N) identifiée. Sinon nous pouvons employer le test d'effets ARCH (ou test du multiplicateur de Lagrange) suivant, introduit par [Engle, 1982](#) :

$$\begin{cases} - H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0 : \sigma_t^2 = \omega : \text{homoscédasticité,} \\ - H_1 : \exists \alpha_n \neq 0 : \sigma_t^2 = \omega + \sum_{n=1}^N \alpha_n \xi_{t-n}^2 : \xi_t \sim ARCH(N). \end{cases}$$

La statistique du test s'écrit : $LM = TR^2$,

avec : R^2 : Coefficient de détermination associé au modèle ARCH(N).

Si $LM < \chi_{1-\alpha}^2(N)$, on ne rejette pas H_0 , il existe donc un effet ARCH. Nous pouvons donc passer à estimer ces effets.

1.3.2 Estimation des paramètres ARMA-GARCH

Toutes les techniques usuelles d'estimation (maximum de vraisemblance, moindres carrés, modèles non paramétriques) s'appliquent également aux modèles GARCH. La plupart des aléas relatifs aux séries financières ne suivent pas une loi normale. Toutefois, même si la vraie distribution n'est pas normale, la densité gaussienne peut être utilisée pour calculer l'estimateur à partir des variables iid η_t (voir [Gouriéroux, 1992](#)). Nous nous intéressons donc à la méthode du pseudo-maximum de vraisemblance.

Dans le cas d'un modèle GARCH linéaire, [Weis, 1982](#) a établi des conditions suffisantes de régularité permettant d'obtenir des propriétés de convergence et de normalité asymptotique dont la plus pertinente est la condition d'existence du moment d'ordre 4 pour les résidus ξ_t . [Lumsdaine, 1990](#) montre que nous pouvons ignorer cette condition dans le cas d'un GARCH(1,1).

Il est à noter que les estimateurs de la moyenne et de la variance conditionnelle sont asymptotiquement non corrélés, quand la vraie densité conditionnelle est normale. Ils peuvent ainsi être estimés séparément sans perte d'efficacité.

Reprenons le processus ARMA(p,q)-GARCH(M,N) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_t = \Delta_t^\lambda + \xi_t \quad \overset{\text{Exemple}}{=} \quad \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + \xi_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \xi_{t-j}, \\ \xi_t = \sqrt{h_t} \eta_t, \\ h_t = \omega + \sum_{n=1}^N \alpha_n \xi_{t-n}^2 + \sum_{m=1}^M \beta_m h_{t-m} = Z'_t \tau. \end{array} \right.$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_t = \sigma_t^2 = V(r_t | I_{t-1}) : \text{Variance conditionnelle}, \\ r_t : \text{Équation de la moyenne généralisée (peut être de type ARMA)}, \\ \Delta_t = E(r_t | I_{t-1}) : \text{Moyenne conditionnelle}, \\ \eta_t \overset{iid}{\rightsquigarrow} f(0,1) : \text{Pseudo-vraisemblance (gaussienne par exemple)}, \\ \lambda' = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q) : \text{Paramètres ARMA}, \\ \tau' = (\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_M) : \text{Paramètres GARCH}, \\ \gamma = (\lambda', \tau') : \text{Paramètres ARMA-GARCH}, \\ Z'_t = (1, \xi_{t-1}^2, \dots, \xi_{t-N}^2, h_{t-1}, \dots, h_{t-M}), \\ \gamma_0 : \text{La vraie valeur des paramètres}. \end{array} \right.$$

La vraisemblance conditionnelle gaussienne s'écrit :

$$L_T(\gamma) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{-\frac{\xi_t^2}{2h_t}}.$$

Son log-vraisemblance s'écrit :

$$l_T = -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{\ln(h_t)}{2} + \frac{\xi_t^2}{2h_t} \right).$$

Ceci revient donc à résoudre le système de CPO :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial l_T}{\partial \tau} = \frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \tau} \left(\frac{\xi_t^2}{2h_t} - 1 \right), \\ \frac{\partial l_T}{\partial \lambda} = \frac{\xi_t X_t}{h_t} + \frac{1}{2} h_t \frac{\partial h_t}{\partial \lambda} \left(\frac{\xi_t^2}{2h_t} - 1 \right), \end{array} \right.$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_t}{\partial \tau} = Z_t + \sum_{m=1}^M \beta_m \frac{\partial h_{t-m}}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial h_t}{\partial \lambda} = -2 \sum_{n=1}^N \alpha_n X_{t-n} \xi_{t-n} + \sum_{m=1}^M \beta_m \frac{\partial h_{t-m}}{\partial \lambda}. \end{array} \right.$$

La résolution numérique peut être faite en utilisant l'algorithme de score ou BHHH (Berndt, Hall, Hall et Hausman, 1974). Le premier est déconseillé pour

le modèle GARCH car les termes récurrents intervenant dans les équations du CPO compliquent cette procédure (Bollerslev, 1986).

Sans entrer dans des détails, Berndt, Hall, Hall et Hausman, 1974 propose cet algorithme :

$$\gamma^{(s+1)} = \gamma^{(s)} + \kappa_s \left(\sum_{t=1}^T \frac{\partial l_T}{\partial \gamma} \frac{\partial l_T}{\partial \gamma'} \right)^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_T}{\partial \gamma'},$$

où : $\begin{cases} \frac{\partial l_T}{\partial \gamma} \text{ est évalué en } \gamma^{(s)}, \\ \kappa_s : \text{Un multiplicateur.} \end{cases}$

1.3.3 Modèles GARCH et prévisions

De nombreux auteurs ont contribué à la question de la prévision dans le cadre d'un processus GARCH. Engle et Kraft, 1983 et Engle et Bollerslev, 1986 ont dérivé les expressions de la variance de l'erreur de prévision dans le cas d'un ARCH et GARCH, respectivement. Nous pouvons également consulter les travaux de Geweke, 1989, Baillie et Bollerslev, 1992 ou encore Nelson et Foster, 1994. Bollerslev, 1986 puis Granger, White et Kamstra, 1989 se sont intéressés à la construction d'intervalles de confiance pour des prévisions à un pas. Considérons le processus GARCH(M,N) vu ci-haut. À l'horizon h , nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_{t+h}^2 &= \omega + \sum_{n=1}^N \alpha_n \xi_{t+h-n}^2 + \sum_{m=1}^M \beta_m \sigma_{t+h-m}^2 \\ &= \omega + \sum_{i=1}^V (\alpha_i \xi_{t+h-i}^2 + \beta_i \sigma_{t+h-i}^2) + \sum_{i=h}^W (\alpha_i \xi_{t+h-i}^2 + \beta_i \sigma_{t+h-i}^2), \end{aligned}$$

où : $V = \min(W, h-1)$ et $W = \max(M, N)$.

La prévision à l'horizon h , sachant l'information à la date t , I_t , est donnée par :

$$\sigma_{t+h|t}^2 = \omega + \sum_{i=1}^V (\alpha_i + \beta_i) \sigma_{t+h-i|t}^2 + \sum_{i=h}^W (\alpha_i \xi_{t+h-i}^2 + \beta_i \sigma_{t+h-i}^2),$$

car : $\xi_{t+h|t}^2 = \sigma_{t+h|t}^2$, si $h > 0$.

Pour plus de détails sur les processus ARMA-GARCH, d'autres ouvrages spécialisés ont parlé du sujet (voir Francq et Zakoian, 2009 et Lardic et Mignon,

2002,...).

Dans ce mémoire, le modèle ARMA-GARCH identifié sera utilisé dans trois contextes. Le premier contexte consiste à utiliser ce modèle directement dans une méthodologie de mesure de risque et de le comparer avec d'autres méthodes candidates. Le second contexte consiste à filtrer la série de données et produire les résidus standardisés utilisés pour estimer les paramètres des queues avec la méthode POT dans le cas de la EVT. Ces mêmes résidus vont être déduits, dans un troisième contexte, de la simulation historique.

CHAPITRE II

LA VALEUR À RISQUE (VAR)

La VaR est un concept utilisé pour mesurer les risques financiers. Elle permet de savoir combien l'établissement financier peut perdre, avec une probabilité donnée, sur un horizon de temps fixé. Autrement dit, la VaR d'un portefeuille d'actifs est la perte maximale attendue, mesurée en unité monétaire sur une période et à un niveau de confiance donné, sous les conditions normales du marché. Pour interpréter la VaR, deux éléments sont indispensables.

Le premier est la période de détention h (holding period) sur laquelle la variation de la valeur du portefeuille est mesurée.

La distribution (conditionnelle ou non) de perte $F_L(\alpha)$ sert à calculer des réserves qui permettent de couvrir certains risques mais pas tous.

Le deuxième élément est le seuil de confiance jugé admissible $p \in]0, 1[$. À ce seuil, correspond une marge d'erreur (failure rate) $\alpha = 1 - p$. Dans notre cas, on prendra un α de 1%, 5% (et parfois 0.1%).

La VaR est calculée à partir de la distribution des rendements. Elle représente la perte maximale attendue, $L_{t,t+h}$, au seuil p .

Mathématiquement, elle s'écrit comme suit :

$$VaR_{t,h}(\alpha) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid P_t(L_{t,t+h} < -x) \leq \alpha\} = F_L^{-1}(\alpha).$$

La figure 2.1 illustre ce point.

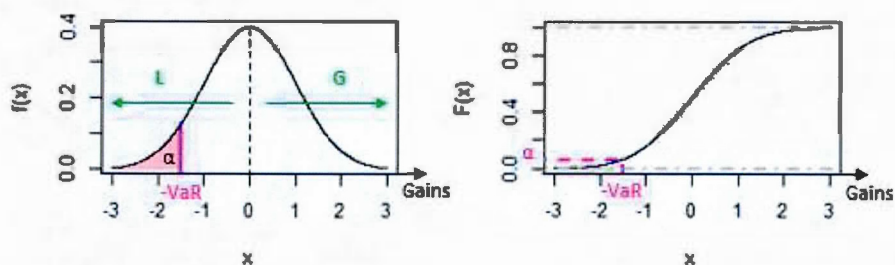


Figure 2.1 : VaR à partir de la densité/distribution des gains.

Il existe différentes autres méthodes pour estimer la VaR. Nous nous intéresserons, par la suite, à quelques unes.

2.1 VaR Historique, Normale et Student non conditionnelle

C'est la première et la plus commune des méthodes utilisées pour estimer la VaR. L'idée principale suppose que la distribution historique des rendements est non conditionnelle, qu'elle restera la même au cours des prochaines périodes et donc que le comportement du changement de prix se répète au fil du temps. La simulation historique de la VaR est, à la base, le quantile empirique de la distribution du rendement, comme on vient de voir, ci-haut :

$$VaR_{t+1,\alpha}^H = \text{Quantile} \left\{ (r_t)_{t=1}^T \right\}.$$

L'avantage de cette méthode est qu'elle est facile à mettre en oeuvre. Elle est non paramétrique et ne suppose aucune hypothèse sur la distribution, capturant ainsi la non normalité dans la série. L'inconvénient est qu'elle ne considère pas l'information donnée par la volatilité (voir [Hendricks, 1996](#) et [Barone-Adesi, Giannopoulos et Vosper, 2000](#)).

Au lieu d'utiliser le quantile de la série, une autre idée serait de faire une hypothèse forte selon laquelle la série des rendements suit une loi normale ou une loi de Student (si T est grand). Dans ce cas, nous utiliserons le quantile de

la loi concernée, sur toute la période T , c'est à dire :

$$VaR_{t+1,\alpha}^N = m_{t+1}T + \sigma_{t+1}\sqrt{T}\eta_\alpha \stackrel{(m=0,\sigma=1)}{=} \sqrt{T}\eta_\alpha,$$

où : m et η_α sont, respectivement, la moyenne et le quantile de la loi Normale centrée réduite (ou Student). Dans le cas d'une loi normale, $\eta_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$, et pour le cas d'une student $\eta_\alpha = F^{-1}(\alpha)$ avec $v = (T - 1)$: nombre de degrés de liberté. Dans ce cas particulier, puisque nous supposons la symétrie de la distribution normale et student, la modélisation de la queue gauche de la distribution est faite séparément à partir des observations de la queue droite en multipliant par -1. Cette hypothèse de normalité peut ne pas donner des résultats plausibles dans la mesure où l'étude de la normalité de la série des rendements a rejeté cette hypothèse depuis le départ.

2.2 VaR Historique, Normale et Student conditionnelle

Reprenons le modèle ARMA-GARCH du chapitre précédent :

$$\begin{cases} r_t = \Delta_t^\lambda + \xi_t \stackrel{\text{Exemple}}{=} \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + \xi_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \xi_{t-j}, \\ \xi_t = \sqrt{h_t} \eta_t, \\ h_t = \omega + \sum_{n=1}^N \alpha_n \xi_{t-n}^2 + \sum_{m=1}^M \beta_m h_{t-m} = Z_t' \tau. \end{cases}$$

La variable aléatoire des innovations (résidus standardisés) η_t étant une loi de probabilité d'espérance nulle et variance unitaire, elle peut prendre n'importe quelle forme. La forme de la loi de probabilité fréquemment utilisée dans la littérature est la loi gaussienne (ou Student pour un grand échantillon). Une estimation de la VaR conditionnelle normale est donnée par :

$$VaR_{t+1,\alpha}^{CN} = \Delta_{t+1}^\lambda + \sigma_{t+1} \Phi^{-1}(\alpha), \quad \text{où : } \sigma_{t+1} : \text{Volatilité conditionnelle.}$$

Dans le cas d'une distribution de Student, une autre expression est utilisée dans la littérature (voir [Trabelsi, Raggad et Marimoutou, 2009](#)) :

$$VaR_{t+1,\alpha}^{CSt} = \Delta_{t+1}^\lambda + \sigma_{t+1} \sqrt{\frac{v-2}{v}} F^{-1}(\alpha),$$

où : $v = (T - 1) - (p + q + N + M)$: nombre de degrés de liberté.

Aussi [Hull et White, 1998](#) et [Barone-Adesi, Giannopoulos et Vosper, 1999](#) combinent le processus GARCH avec la simulation historique de la VaR pour remédier à certaines lacunes de cette dernière. Ils proposent ainsi la VaR historique filtrée dont [Barone-Adesi et Giannopoulos, 2001](#) a montré la supériorité par rapport à la VaR non conditionnelle. C'est une méthode semi-paramétrique du moment où elle n'impose aucune distribution particulière mais qui estime la variance future à l'aide d'un modèle de volatilité, reflétant ainsi en mieux l'état actuel du marché à n'importe quel niveau de confiance. La VaR historique filtrée s'écrit :

$$VaR_{t+1,\alpha}^{HF} = \Delta_{t+1}^{\lambda} + \sigma_{t+1} \text{Quantile} \{ (\eta_t)_{t=1}^T \}.$$

L'avantage de ces deux procédures est qu'elles prennent en compte la volatilité dans l'estimation de la VaR. L'inconvénient est qu'elles ne permettent pas de comptabiliser toute l'information présente dans la queue de la distribution, surtout si l'hypothèse de normalité est rejetée. La résolution d'un tel problème fait l'objet de la section suivante.

2.3 Lien entre la théorie des valeurs extrêmes (EVT) et la VaR

Dans cette section, nous allons évoquer quelques résultats majeurs de la théorie des valeurs extrêmes qui vont contribuer à affiner encore la modélisation de la VaR en prenant en compte l'information donnée par l'épaisseur de la queue.

La modélisation des valeurs extrêmes peut être réalisée par la modélisation du maximum global (ou du minimum global) de la série de données ou la modélisation de la distribution des excès au-dessus d'un certain seuil (méthode POT (Peaks Over Threshold)).

2.3.1 La loi limite du maximum

Afin de modéliser les maximums, il convient tout d'abord de définir la loi limite pour ce maximum. Pour ceci, soient, les variables aléatoires iid $X_i, \forall i = 1, \dots, n$ de loi F et, $x^* = \sup \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) < 1\}$, le point terminal (Endpoint) d'une fonction de répartition F c'est à dire le max du support de distribution (ou la borne supérieure). La loi limite pour le maximum, $M_n = \max \{X_i, \forall i = 1, \dots, n\}$, est donnée par :

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \stackrel{X_i \text{ iid}}{=} \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = [F_X(x)]^n,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(M_n \leq x) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{si } x < x^*, \\ 1, & \text{si } x \geq x^*, \end{cases} \\ \text{et} \\ P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = [F_X(a_n x + b_n)]^n, \quad \forall (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

La loi limite asymptotique du maximum est, donc, une loi dégénérée car il existe un réel $x = x^*$ tel que : $P(M_n = x) = 1$. Alors que la loi limite de $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ est non dégénérée et nous chercherons deux réels a_n et b_n de sorte que $P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \neq 1$. Fisher et Tippett, 1928 et Gnedenko, 1943 ont prouvé que si pour deux suites a_n et b_n , on a :

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = [F_X(a_n x + b_n)]^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(x), \quad G(x) : \text{Loi non dégénérée},$$

alors, pour $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n > 0$, G est une des trois types de distributions suivantes :

- Gumbel : $\Lambda = \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R},$
- Frechet : $\Phi_\alpha = \exp(-x^{-\alpha}), \quad x \in \mathbb{R}^+, \alpha > 0,$
- Weibull : $\Psi_\alpha = \exp(-(-x)^\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^-, \alpha > 0.$

On dit que F appartient au max-domaine d'attraction de G ($MDA(G)$).

2.3.2 Distribution généralisée des valeurs extrêmes

Plus tard, (voir [Embrechts, Kluppelberg et Mikosch, 1997](#)), [Von Mises, 1936](#) et [Jenkinson, 1955](#) ont rassemblé les trois familles de lois précédentes en une unique famille, la GEVd (Generalized Extreme Value distribution), s'écrivant :

$$H_{\zeta}(x) = \begin{cases} \exp\left(-(1 + \zeta x)^{-1/\zeta}\right), & 1 + \zeta x > 0, \quad \text{si } \zeta \neq 0, \\ \exp(-e^{-x}), & x \in \mathbb{R}, \quad \text{si } \zeta = 0, \end{cases}$$

Dépendamment de l'indice des queues ζ , on remarque un lien avec les trois familles de lois précédentes. Ainsi, pour :

$$\zeta = \begin{cases} 0, & H_0 = \Lambda, \\ \frac{1}{\alpha} > 0, & , x \text{ infini et } H_{\frac{1}{\alpha}} \approx \Phi_{\alpha}, \\ -\frac{1}{\alpha} < 0, & , x \text{ fini et } H_{-\frac{1}{\alpha}} \approx \Psi_{\alpha}. \end{cases}$$

La figure 2.2, ci-dessous, illustre ce lien.

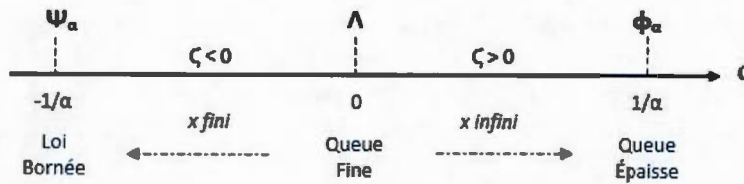


Figure 2.2 : Lien entre les trois familles de la GEVd

La figure 2.3, ci-dessous, donne un descriptif de la GEV.

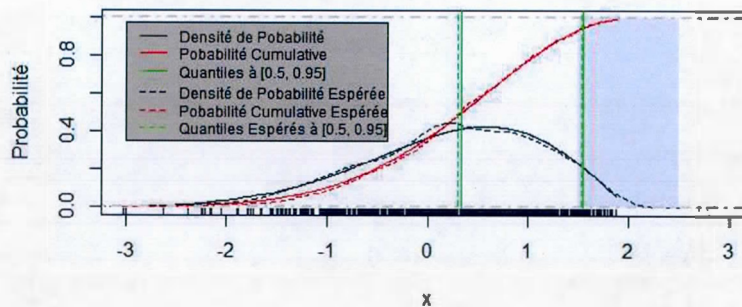


Figure 2.3 : Représentation de la GEVd pour $\zeta < 0$

2.3.3 Approximation du point terminal

Einmahl et Smeets, 2011 et Einmahl et Magnus, 2008 ont montré qu'en passant par le logarithme, pour un $\zeta < 0$ (x fini), la relation de convergence, ci-haut, de Fisher et Tippett, 1928 et Gnedenko, 1943, peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 & -t \operatorname{Log} F(a_t x + b_t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\operatorname{Log} G(t), \\
 \Rightarrow & t(1 - F(a_t x + b_t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (1 + \zeta x)^{-\frac{1}{\zeta}}, \\
 \Rightarrow & 1 - F(a_t x + b_t) \approx \frac{(1 + \zeta x)^{-\frac{1}{\zeta}}}{t}, \\
 \Rightarrow & 1 - F(x^*) \approx \frac{1}{t} (1 + \zeta \frac{x^* - b_t}{a_t})^{-\frac{1}{\zeta}}, \quad \text{avec : } x^* = a_t x + b_t, \\
 \Rightarrow & \boxed{x^* \approx b_{n/k} - \frac{a_{n/k}}{\zeta}}, \quad \text{avec : } F(x^*) = 1, \quad t = \frac{n}{k}, \quad k \ll n,
 \end{aligned}$$

où : $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$: Nombre d'observations extrêmes (upper order statistics).

Une approximation de x^* est, donc, obtenue à partir d'un $\zeta < 0$ et une loi GEV.

Cependant, en pratique, cette méthode a été fortement critiquée dans le sens où l'estimation des paramètres de la distribution GEV est une estimation dite «Block component-wise», ce qui veut dire qu'à partir des données initiales, on extrait des blocs (sous populations) de même taille, puis nous considérons la distribution formée par les maxima de chacun de ces blocs (une seule valeur maximale par bloc). Cette méthode implique donc une perte d'informations. En particulier, certains blocs peuvent contenir plusieurs valeurs extrêmes pour la distribution initiale, alors que d'autres peuvent ne pas en contenir. Le problème a été résolu, en considérant toutes les observations au-dessus d'un certain seuil suffisamment élevé (Threshold), $u < x^*$ fixé, et plus particulièrement les différences entre ces observations et le seuil, dites excès. C'est la méthode à dépassement de seuil (POT) (voir Davison et Smith, 1990).

2.3.4 Distribution des excès et distribution de Pareto généralisée

La distribution des excès, au-dessus du seuil $u < x^*$, s'écrit :

$$F_u(x) = P(X \leq x + u | X > u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)},$$

avec : $0 \leq x \leq x^* - u$, $y(t) = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{t}\right)$: Fonction quantile.

Pickands, 1975 et Balkema et De Hann, 1974 font le lien entre le comportement asymptotique de la distribution des excès $F_u(x)$ et celle de la GPD (Generalized Pareto Distribution), $G_{\zeta, \iota(u)}(x)$. Ils proposent que si $F_u(x) \in MDA(H_\epsilon(x))$, alors il est possible de trouver une fonction $\iota(u) > 0$ et mesurable de telle sorte que :

$$\sup_{0 \leq x \leq x^* - u} |F_u(x) - G_{\zeta, \iota(u)}(x)| \xrightarrow{x \rightarrow x^*} 0,$$

$$\text{où : } G_{\zeta, \iota(u)}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \zeta \frac{x}{\iota(u)}\right)^{-1/\zeta}, & \text{si } \zeta \neq 0, \\ 1 - e^{-\frac{x}{\iota(u)}}, & \text{si } \zeta = 0, \end{cases}$$

$$\text{et pour : } \begin{cases} \zeta \geq 0, & x \geq 0, \\ \zeta < 0, & 0 < x \leq -\frac{\iota(u)}{\zeta}. \end{cases}$$

L'estimation des paramètres de la GPD pose un problème de la détermination du seuil u . Ce dernier ne doit pas être trop grand car il faut suffisamment de données pour avoir une bonne précision des estimateurs. Une approximation de la distribution des excès serait la fonction d'excès moyenne (Mean Excess Function) qui est donnée par :

$$\begin{aligned} a(u) &= \int_u^\infty \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(u)} dt = \int_u^\infty \frac{P(X > t)}{P(X > u)} dt = \int_u^\infty P(X > t | X > u) dt, \quad t > u, \\ &= E(X - u | X > u). \end{aligned}$$

Un estimateur empirique de la fonction d'excès moyenne (voir Kaarik et Zegulova, 2012) s'écrit :

$$\hat{a}_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)^+}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i > u\}}} = \frac{\sum_{i=1}^k (X_i - u)}{k}, \quad (X_i - u)^+ = \sup\{X_i - u, 0\}.$$

La figure 2.4, ci-dessous, présente le graphique de cette fonction, dans son intervalle de confiance, dépendamment de u avec X_i donné. Nous choisissons le plus petit u selon lequel $\hat{a}_n(u)$ soit approximativement linéaire, $\forall x \geq u$. Par exemple, dans ce cas de figure, on choisit $u = 10$.

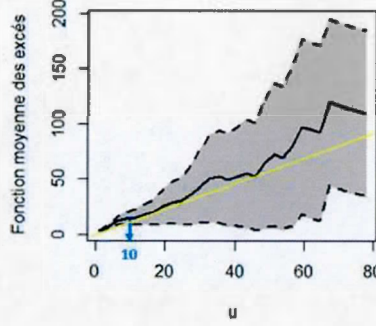


Figure 2.4 : Choix du seuil u

Une fois le seuil déterminé, nous pourrions estimer les paramètres de la GPD. Pour ceci, il existe différentes méthodes dont le maximum de vraisemblance, la méthode delta, la vraisemblance profilée, la méthode de Hill (graphique et analytique), la méthode AMSE et la méthode par analyse de sensibilité. Nous n'allons définir, par la suite, que la première et les trois dernières. Nous allons également présenter une technique pour prévoir le rendement extrême.

2.3.5 Méthodes d'estimation de l'indice des queues

2.3.5.1 Estimation par maximum de vraisemblance

Soit, $Y_i = X_i - u$, la variable aléatoire iid des excès et $\Gamma' = (\zeta, \iota)$ le vecteur des paramètres de la GPD de densité $g_{\Gamma}(y_i) = \frac{\partial G_{\Gamma}(y_i)}{\partial y_i}$.

La vraisemblance est donnée par :

$$\begin{aligned} L(\Gamma; Y_i) &= \prod_{i=1}^n g_{\Gamma}(y_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\iota} \left(1 + \zeta \frac{y_i}{\iota}\right)^{-\frac{1}{\zeta}-1}, \\ \Rightarrow \text{Log}(L(\Gamma; Y_i)) &= -n \text{Log} \iota - \left(1 + \frac{1}{\zeta}\right) \sum_{i=1}^n \text{Log} \left(1 + \zeta \frac{y_i}{\iota}\right). \end{aligned}$$

En posant $\chi = \frac{\zeta}{\hat{\zeta}}$, la maximisation du log de vraisemblance, sur chacun des paramètres, donne le système suivant :

$$\begin{cases} \hat{\zeta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Log} (1 + \chi y_i) = \hat{\zeta}(\chi), \\ \frac{1}{\hat{\chi}} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\hat{\zeta}}\right) \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{1 + \hat{\chi} y_i}. \end{cases}$$

Similairement avec la GEV, $\hat{\Gamma}$ sera consistant si $\zeta > -1$ et asymptotiquement gaussien quand $\zeta > -0.5$. Mais, puisque le log-vraisemblance peut être arbitrairement très large en prenant $\zeta < -1$ et $\chi \rightarrow -\max(y_i)$, nous aurons un problème de convergence dans ce cas. Pour y remédier, Hosking, Wallis et Wood, 1985 et Hosking et Wallis, 1987 ont proposé une première méthode numérique itérative qui consiste à garder les estimateurs $\hat{\zeta}$ et $\hat{\iota}$ donnant un maximum local de $\text{Log}L$, pour autant qu'on dispose d'une valeur initiale Γ_0 proche de Γ . C'est la méthode de Newton-Raphson qui se base sur l'équation itérative suivante :

$$\hat{\Gamma}^{i+1} = \hat{\Gamma}^i - \frac{d\text{Log}L(\Gamma; Y_i)/d\Gamma}{d^2\text{Log}L(\Gamma; Y_i)/d\Gamma^2}.$$

L'étape, ci-dessus, se répète, pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$, jusqu'à ce que $|\hat{\Gamma}^{i+1} - \hat{\Gamma}^i| < E$, avec E désigne la valeur maximale de l'erreur tolérée.

Pratiquement, les mêmes auteurs proposent aussi la méthode des moments ou encore la méthode des moments pondérés, où ils fixent les expressions de $\hat{\zeta}$ et $\hat{\iota}$.

2.3.5.2 Estimateurs de Hill

Les variables ne sont plus distribuées selon la loi totalement paramétrique de Pareto $G_{\Gamma}(x)$ mais l'idée de Embrechts, Kluppelberg et Mikosch, 1997 et Beirlant et al., 2004 consiste à ce que les variables suivent une loi de type Pareto semi paramétrique et plus précisément une loi Fréchet $\Phi_{\frac{1}{\zeta}}$. Donc, $\hat{\zeta}$ est défini seulement

sur la loi de Fréchet à queue épaisse.

$$X_i \rightsquigarrow MDA\left(\Phi_{\frac{1}{\zeta}}\right), \quad \zeta > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{F}(x) = x^{-\frac{1}{\zeta}} L(x),$$

où :

$$\begin{cases} \zeta = \frac{1}{\iota}, \\ x^{-\frac{1}{\zeta}} : \text{Loi de Pareto à un paramètre,} \\ L(x) : \text{Variation (non paramétrique).} \end{cases}$$

Hill, 1975 a proposé différentes formes pour $L(x)$ dont :

$$\begin{cases} 1 : \text{Variation rapide,} \\ u^\alpha, \quad x \geq u > 0 : \text{Variation lente de premier ordre,} \\ c(1 + x^{-b}), \quad c \text{ et } b \text{ fixées : Variation lente de second ordre.} \end{cases}$$

La dernière est la forme générale dont l'allure est donnée par la figure 2.5.

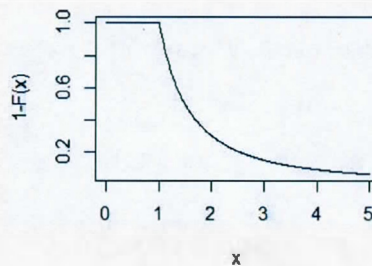


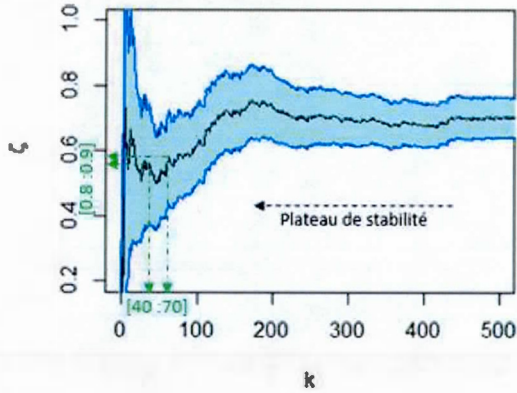
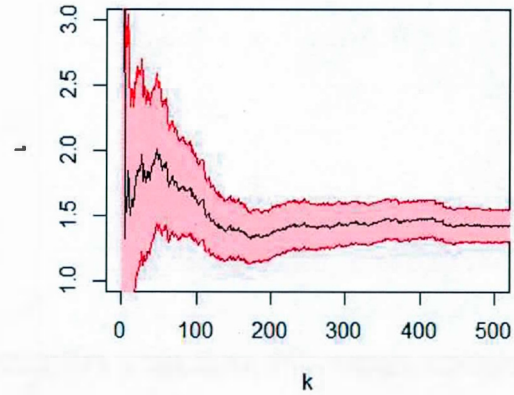
Figure 2.5 : Fonction de survie d'une Pareto de 2nd ordre

L'approche par maximum de vraisemblance nous permet d'avoir la forme suivante pour ζ et ι :

$$\zeta = \frac{1}{\iota} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_{n-i+1:n}) - \text{Log}(x_{1:n}).$$

Les figures 2.6 et 2.7 montrent la tendance de ces deux paramètres dans leur intervalle de confiance. Nous remarquons la sensibilité des paramètres à l'augmentation de k . Le même auteur propose les estimateurs suivants :

$$\hat{\zeta}_k = \frac{1}{\hat{\iota}_k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \text{Log}(x_{n-i+1:n}) - \text{Log}(x_{n-k+1:n}).$$

Figure 2.6 : Graphique de Hill pour ζ Figure 2.7 : Graphique de Hill pour ν

Graphiquement, nous suivons le plateau de stabilité et une méthode naïve serait de prendre la moyenne des k dans une des deux régions de stabilité probables de $\hat{\zeta}_k$. Si k est petit, la première région de stabilité est identifiée par un faible biais et une grande volatilité, et vice-versa. Pour une meilleure estimation de ζ , k ne doit être ni trop petit ni trop grand. Dans le cas de la figure 2.6, k est pris dans l'intervalle $[40 : 70]$, ce qui donne un $\hat{\zeta}$ dans l'intervalle $[0.8 : 0.9]$.

Cependant, si nous ne sommes pas certains, cette méthode pourrait être améliorée, pour plus de précision, en considérant comme initiaux les ζ obtenus à partir du k optimal de la méthode de Hill, noté, ζ_{ini} , et puisque k a un impact direct sur la volatilité et le biais, on va chercher une région optimale pour ce dernier, pour laquelle l'erreur quadratique moyenne asymptotique, AMSE, du zêta final, $\hat{\zeta}_f$, soit minimale.

2.3.5.3 Estimateurs par la méthode AMSE

Le AMSE est une extension de la méthode de Hill. Il peut être défini comme la somme de la variance asymptotique (AVar) et le carré du biais asymptotique (ABias).

Et pour chaque k et $\hat{\zeta}_{ini}^i < 0$, $i=1, \dots, s$, on a :

$$AMSE(k, \hat{\zeta}_{ini}^i) = AVar(k, \hat{\zeta}_{ini}^i) + (ABias(k, \hat{\zeta}_{ini}^i))^2, \quad \text{tel que :}$$

$$\begin{cases} - AVar(k, \hat{\zeta}_{ini}^i) = \frac{(1-\hat{\zeta}_{ini}^i)^2(1-2\hat{\zeta}_{ini}^i)(1-\hat{\zeta}_{ini}^i+6(\hat{\zeta}_{ini}^i)^2)}{k(1-3\hat{\zeta}_{ini}^i)(1-4\hat{\zeta}_{ini}^i)}, \\ - ABias(k, \hat{\zeta}_{ini}^i) = \frac{(1-2\hat{\zeta}_{ini}^i)}{\hat{\zeta}_{ini}^i(1-\hat{\zeta}_{ini}^i)} \hat{c}\left(\frac{n}{k}\right), \quad c(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \end{cases}$$

La détermination de $\hat{c}(\frac{n}{k})$ est expliquée dans les [Einmahl et Smeets, 2011](#) et [Beirlant et al., 2005](#), où ils ont proposé l'approximation suivante :

Soit,

$$Z_j = (j+1) \text{Log} \frac{UH_j}{UH_{j+1}} = \zeta + c\left(\frac{n}{k}\right) \left(\frac{j}{k}\right)^{-\hat{\zeta}_{ini}^i} + \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, k,$$

avec : $UH_j = X_{n-j:n} M_n^{(1)}(j)$ et ϵ_j : les résidus d'une régression linéaire.

Une estimation par moindres carrés ordinaires de Z_j donne l'approximation suivante :

$$\begin{aligned} \hat{Z}_j = Z_j - \hat{\zeta}_{ini}^i &= \zeta + c\left(\frac{n}{k}\right) \left(\frac{j}{k}\right)^{-\hat{\zeta}_{ini}^i} + \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, k. \\ \Rightarrow \hat{c}\left(\frac{n}{k}\right) &= \frac{\sum_{j=1}^k \hat{Z}_j \left(\frac{j}{k}\right)^{-\hat{\zeta}_{ini}^i}}{\sum_{j=1}^k \left(\frac{j}{k}\right)^{-2\hat{\zeta}_{ini}^i}}. \end{aligned}$$

Il en résulte que les régions optimales pour chaque $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ sont les régions pour lesquelles $\overline{AMSE}(k)$ est le plus petit :

$$\overline{AMSE}(k) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \overline{AMSE}(k, \hat{\zeta}_{ini}^i).$$

Ayant obtenu les régions optimales pour k , nous pouvons déterminer le $\hat{\zeta}_f$ qui est la moyenne des moyennes des $\hat{\zeta}_{ini}^i$ dans ces régions.

2.3.5.4 Estimateurs par analyse de sensibilité

Pour étudier la sensibilité de nos résultats au choix de k , nous pouvons effectuer une analyse de sensibilité qui consiste à calculer, pour différentes valeurs de k ,

la VaR-GPD (conditionnelle ou non conditionnelle). De par la tendance de cette dernière, nous pouvons remarquer qu'aux alentours du k optimal choisi, il existe un plateau de stabilité où la VaR-GPD connaît une faible variation, voire même une constance. Cette technique peut servir, donc, à déterminer le k optimal.

2.3.5.5 Estimation du point terminal

L'analyse pourra être extrapolée au delà de l'étude des VaR pour aller chercher l'ultime point (qui est le rendement extrême sur chacune des queues, dans notre cas) en introduisant l'estimateur de $\hat{\gamma}_f$ dans l'approximation de \hat{x} vue, ci-haut. En effet, [Haan et Ferreira, 2006](#) ont trouvé des estimateurs de $a_{n/k}$ et $b_{n/k}$, respectant la relation suivante :

$$\hat{x}^* = \hat{b}_{n/k} - \frac{\hat{a}_{n/k}}{\hat{\gamma}_f}, \quad \text{avec : } \begin{cases} - \hat{a}_{n/k} = (1 - \min\{0, \hat{\gamma}_f\}) X_{n-k:n} M_n^{(1)}, \\ - \hat{b}_{n/k} = X_{n-k:n}. \end{cases}$$

Un intervalle de confiance peut être construit à partir de la convergence en loi suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}(\hat{x}^* - x^*)}{\hat{a}_{n/k}} &\xrightarrow{L} N\left(0, \underbrace{\frac{(1 - \hat{\gamma}_f)^2 (1 - 3\hat{\gamma}_f + 4\hat{\gamma}_f^2)}{\hat{\gamma}_f^4 (1 - 2\hat{\gamma}_f)(1 - 3\hat{\gamma}_f)(1 - 4\hat{\gamma}_f)}}_{\Omega}\right) \\ \Rightarrow \begin{cases} - V\left(\frac{\sqrt{k}(\hat{x}^* - x^*)}{\hat{a}_{n/k}}\right) = \Omega, \\ - E\left(\frac{\sqrt{k}(\hat{x}^* - x^*)}{\hat{a}_{n/k}}\right) = 0. \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} - V(x^*) = \frac{\hat{a}_{n/k}^2 \Omega}{k}, \\ - E(x^*) = \hat{x}^*. \end{cases} \\ \Rightarrow IC = [E(x^*) \pm 1.96V(x^*)] &= \left[\hat{x}^* \pm 1.96 \frac{\hat{a}_{n/k}^2 \Omega}{k}\right]. \end{aligned}$$

2.3.6 VaR-GPD non conditionnelle : Méthode POT

La théorie des valeurs extrêmes est importante pour estimer la VaR puisque cette dernière est directement liée à la queue de la distribution. La méthode

POT consiste à avoir l'approximation suivante de $F(x)$, pour $x > u$:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= F(u) + (1 - F(u)) P(X \leq x \mid X > u) \\
 &= F(u) + (1 - F(u)) (1 - P(X > x \mid X > u)) \\
 &= F(u) + 1 - F(u) - (1 - F(u)) P(X > x \mid X > u) \\
 &= 1 - \bar{F}(u) P(X > x \mid X > u). \\
 \implies \bar{F}(x) &= \bar{F}(u) P(X - u > x - u \mid X > u).
 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
 P(X - u > x - u \mid X > u) &= F_u(x - u) = G_{\zeta, \iota(u)}(x - u) \stackrel{\zeta \neq 0}{=} 1 - \left(1 + \zeta \frac{x - u}{\iota(u)}\right)^{-1/\zeta}, \\
 \text{et } F(u) = 1 - \frac{k}{n} &\Rightarrow \bar{F}(u) = \frac{k}{n}, \\
 \text{et } \bar{F}(Q_\alpha) = 1 - \alpha, \quad Q_\alpha : \text{Quantile au seuil } \alpha,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \implies \bar{F}(Q_\alpha) &= \frac{k}{n} \left[1 + \frac{\zeta}{\iota} (Q_\alpha - u)\right]^{-\frac{1}{\zeta}} = 1 - \alpha, \\
 \implies VaR_\alpha^{GPD_{NC}} &= \hat{Q}_\alpha^{POT} = u + \frac{\iota}{\zeta} \left[\left(\frac{n}{k} (1 - \alpha)\right)^{-\zeta} - 1\right].
 \end{aligned}$$

Cependant, la VaR-GPD non conditionnelle ne reconnaît pas le fait que les rendements ne sont pas iid.

2.3.7 VaR-GPD conditionnelle

Afin de pallier les inconvénients de chacune des approches complémentaires, la solution suggérée par [McNeil et Frey, 2000](#) est de combiner les deux approches. La VaR-GPD conditionnelle a la propriété de capturer l'hétéroscédasticité dans la série de rendements à partir du GARCH, et de modéliser l'information contenue dans les queues de la distribution à l'aide de la théorie des valeurs extrêmes. Différents auteurs, dont [Bali et Neftci, 2003](#), [Bystrom, 2004](#), [Bystrom, 2005](#), [Krehbiel et Adkins, 2005](#) et [Trabelsi, Raggad et Marimoutou, 2009](#), ont prouvé la performance de ce modèle comparé à d'autres sur différents marchés.

La même procédure d'approche conditionnelle de la VaR que celle vue ci-haut, pour le cas de la VaR historique et normale, est entreprise ici aussi en modélisant

les innovations η_t par la VaR-GPD non conditionnelle. L'estimation de la VaR-GPD conditionnelle est donnée par :

$$VaR_{t+1,\alpha}^{GPD_C} = \Delta_{t+1}^\lambda + \sigma_{t+1} VaR_{t,\alpha}^{GPD_{NC}}(\eta_t).$$

On obtient, ainsi, une formule de VaR qui est susceptible de refléter en mieux la série de rendements.

2.4 VaR de Cornish-Fisher

Puisque, en réalité, les rendements ont des asymétries négatives et des coefficients d'aplatissement plus élevés que ceux de la loi normale, une autre méthode pour intégrer l'information donnée par les queues, autre que la théorie des valeurs extrêmes, est proposée par [Cornish et Fisher, 1937](#). Elle consiste à utiliser un développement limité du quantile normal centré réduit en tenant compte, ainsi, de l'asymétrie et du Kurtosis en excès. En effet, l'expression courante du quantile normale (VaR normale non conditionnelle) vue ci-haut, s'écrit :

$$VaR_{t+1,\alpha}^N(r_t) = mT + \sigma\sqrt{T}\eta_\alpha = mT + \sigma\sqrt{T}\Phi^{-1}(\alpha).$$

L'expansion de Cornish-Fisher est une tentative d'estimer ce quantile en fonction des premiers cumulants. Au lieu de η_α , on aura plutôt :

$$\begin{aligned} \eta_\alpha^{CF} \approx & \eta_\alpha + \frac{(\eta_\alpha^2 - 1)k_3}{6} + \frac{(\eta_\alpha^3 - 3\eta_\alpha)k_4}{24} - \frac{(2\eta_\alpha^3 - 5\eta_\alpha)k_3^2}{36} + \frac{(\eta_\alpha^4 - 6\eta_\alpha^2 + 3)k_5}{120} \\ & - \frac{(\eta_\alpha^4 - 5\eta_\alpha^2 + 2)k_3k_4}{24} + \frac{(12\eta_\alpha^4 - 53\eta_\alpha^2 + 17)k_3^2}{324}, \end{aligned}$$

où : k est le Kurtosis de la série dépendamment du moment μ , et :

$$k_1 = \bar{r},$$

$$k_2 = \mu_2,$$

$$k_3 = \mu_3,$$

$$k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2,$$

$$k_5 = \mu_5 - 10\mu_3\mu_2,$$

$$\mu_h = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^h, \quad h = 1, \dots, 5.$$

La VaR de Cornish-Fisher, pour toute la période T , est alors :

$$VaR_{t+1,\alpha}^{CF}(r_t) \approx mT + \sigma\sqrt{T}\eta_{\alpha}^{CF}.$$

2.5 Technique numérique pour estimer la VaR

Pratiquement, parmi les techniques utilisées pour avoir une prévision de la VaR estimée par l'une ou l'autre des méthodes vues précédemment, nous procédons par une technique de roulement, ou encore par fenêtre glissante (rolling window), de 100 jours. Cette dernière consiste à supposer que nous disposons de T observations des rendements et que l'on partage l'échantillon en deux sous-échantillons dont le second, dit de prévision out-of-sample, comprend $T-N$ observations réalisées pour une période qui se situe à l'extérieur de l'échantillon utilisé pour l'estimation des paramètres GARCH. Elle ré-estime le modèle des dates 1 à N inclus, puis réalise une prévision pour les dates 2 à $N+1$ et ainsi de suite afin d'obtenir une séquence de $T-N$ prévisions de la VaR, notées $\{VaR_{t+1,T}(\alpha)\}_{t=T-N}^{T-1}$ (voir figure 2.8).

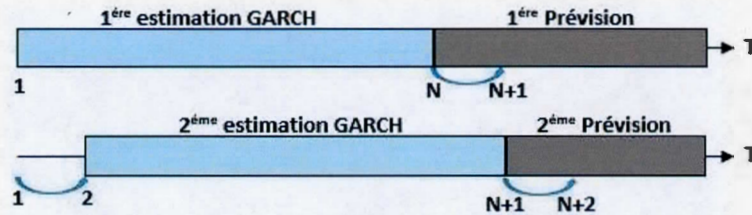


Figure 2.8 : Prévisions out-of-sample et estimation glissante

L'avantage principal de cette technique est qu'elle nous permet de capturer la variation dynamique dans les caractéristiques de la série, dans des périodes de temps plus réduites.

2.6 Backtesting et évaluation des modèles de VaR

Vue la grande diversité des méthodes de prévision de la VaR, le backtesting doit permettre de déterminer les méthodes les plus appropriées. De ce fait, [Jorion, 2007](#)

a défini le backtesting comme étant l'ensemble des procédures (tests) statistiques dont le but est de comparer les pertes réelles observées ex-post avec les pertes prévues ex-ante (VaR). La majorité des tests de backtesting sont des tests de validation. Le deuxième genre de tests sont les tests de comparaison (Bao, Lee et Saltoglu, 2004 et Corradi et Swansson, 2005). Nous n'allons nous intéresser ici qu'aux premiers.

Dans le cas où les pertes observées, à une date $t+1$, excèdent la VaR anticipée (négative), à une date $t+1$ sachant l'information à t , $VaR_{t+1|t}$, et pour un taux de couverture α , nous enregistrons une violation (hit ou exception) dont la fonction est donnée par la séquence de violation binaire suivante :

$$\text{Queue gauche : } I_{t+1}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{si } r_{t+1} < VaR_{t+1|t}(\alpha), \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

Christoffersen, 1998 stipule que pour qu'une prévision de VaR soit valide, il suffit que I_{t+1} vérifie une de ces deux hypothèses indépendantes l'une de l'autre : la couverture non conditionnelle et l'indépendance.

L'hypothèse de couverture non conditionnelle (CNC) est satisfaite quand :

$$H_0 : E[I_{t+1}(\alpha)] = P[I_{t+1}(\alpha) = 1] = P[r_{t+1} < VaR_{t+1|t}(\alpha)] = \alpha.$$

Sous cet hypothèse : $I_{t+1}(\alpha) \sim \mathcal{B}(\alpha)$: Loi de Bernoulli de probabilité α .

Remarque : (voir Berkowitz et O'Brien, 2002).

$$E[I_{t+1}(\alpha)] = P[I_{t+1}(\alpha) = 1] \begin{cases} > \alpha, & \text{Risque de premier ordre :} \\ & \text{Sous-estimation de la VaR,} \\ < \alpha, & \text{Risque de second ordre :} \\ & \text{Sur-estimation de la VaR (conservative).} \end{cases}$$

Nous pouvons considérer cette espérance comme le ratio (pourcentage) de violation, pour chaque queue :

$$E[I_{t+1}(\alpha)] = \hat{I}_{t+1}^R(\alpha) = \frac{\sum_{t=1}^T I_{t+1}(\alpha)}{T},$$

où T : nombre total de VAR_s , pour toute la période ou pour les sous-périodes, à la queue gauche (T_L) ou droite (T_G).

L'hypothèse d'indépendance (IND) est satisfaite si :

$$H_0 : I_{t+1}(\alpha) \text{ est indépendant de } I_{t+1-k}(\alpha), \quad \forall k \neq 0.$$

Sous cette hypothèse essentielle, il n'existe pas de cluster de volatilité. Dans le cas contraire, des violations successives seront engendrées sous forme de cluster et donc des pertes extrêmes peuvent succéder à d'autres, donnant lieu, ainsi, à une faillite (voir [Berkowitz et O'Brien, 2002](#)).

Si ces deux hypothèses sont confirmées, nous parlons de couverture conditionnelle. L'hypothèse de couverture conditionnelle (CC) est, donc, satisfaite quand :

$$H_0 : E[I_{t+1}(\alpha) \mid \mathcal{I}_t] = P[I_{t+1}(\alpha) = 1 \mid \mathcal{I}_t] = P[r_{t+1} < VaR_{t+1|t}(\alpha) \mid \mathcal{I}_t] = \alpha,$$

où : \mathcal{I}_t : L'information disponible à la date t .

Nous allons voir, par la suite, comment tester ces trois hypothèses (voir [Campbell, 2007](#), [Hurlin et Tokpavi, 2008](#) et [Jorion, 2007](#)) en nous intéressant au test de durée de Kupiec comme test de couverture non conditionnelle, au test de Christoffersen comme test d'indépendance et aussi de couverture conditionnelle, au test de Christoffersen et Pelletier comme test d'indépendance, au test CAViaR comme test de couverture conditionnelle, et finalement au test GMM comme test de couverture non conditionnelle, d'indépendance et aussi de couverture conditionnelle.

2.6.1 Test de couverture non conditionnelle

2.6.1.1 Test de Kupiec

Soit, U le nombre de violations dans T prévisions successives de la VaR, tel que :

$$\begin{cases} U = \sum_{t=1}^T I_{t+1}(\alpha), \\ \hat{\alpha} = \frac{U}{T} : \text{Proportion espérée des violations (failure rate)}. \end{cases}$$

Dans le cadre de ce test, l'hypothèse de CNC s'écrit :

$$H_0 : \hat{\alpha} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{p} \alpha.$$

Sous cette hypothèse : Si les $I_{t+1}(\alpha)$ sont iid, $U \rightsquigarrow \mathcal{B}(T, \alpha)$.

Et si T est grand, la loi binomiale peut être approximée par une loi normale et sous l'hypothèse de CNC, on aura : $\frac{U - \alpha T}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)T}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Kupiec, 1995 propose une alternative à cette statistique. Il suggère le test de ratio de vraisemblance (LR).

La statistique du test est la suivante :

$$LR^{CNC} = 2 \left[\text{Log} \left(\left(\frac{U}{T} \right)^U \left(1 - \frac{U}{T} \right)^{T-U} \right) - \text{Log} (\alpha^U (1 - \alpha)^{T-U}) \right].$$

Si $LR^{CNC} > \chi_{1-\alpha}^2(1)$, on rejette H_0 .

2.6.2 Test d'indépendance

2.6.2.1 Test d'indépendance de Christoffersen

Christoffersen, 1998 suppose que, sous l'hypothèse d'IND, le processus des violations $I_{t+1}(\alpha)$ peut être modélisé par une chaîne de Markov ayant comme matrice des probabilités de transition :

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} \\ \pi_{10} & \pi_{11} \end{pmatrix}, \quad \text{où : } \pi_{ij} = P[I_{t+1}(\alpha) = j \mid I_t(\alpha) = i] = \frac{u_{ij}}{\sum_j u_{ij}}.$$

L'hypothèse d'IND devient :

$$H_0 : \Pi = \Pi_{\hat{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 - \hat{\alpha} & \hat{\alpha} \\ 1 - \hat{\alpha} & \hat{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \text{où : } \hat{\alpha} \text{ peut être égale ou différente de } \alpha.$$

La statistique du test est la suivante :

$$LR^{IND} = 2 \left[\text{Log} \left((1 - \pi_{01})^{u_{00}} \pi_{01}^{u_{01}} (1 - \pi_{11})^{u_{10}} \pi_{11}^{u_{11}} \right) - \text{Log} \left(\hat{\alpha}^U (1 - \hat{\alpha})^{T-U} \right) \right].$$

Si $LR^{IND} > \chi_{1-\alpha}^2(1)$, on rejette H_0 .

Ce test est critiquable du fait que, en premier lieu, l'indépendance est testée contre une forme particulière de dépendance qui ne prend pas en compte des dépendances d'ordre supérieur à un, et en deuxième lieu, l'utilisation d'une chaîne de Markov ne permet pas de mesurer le rôle d'autres variables que $I_{t+1}(\alpha)$ dans une possible dépendance des violations.

2.6.2.2 Test de durée de Christoffersen et Pelletier

Avec ce test, [Christoffersen et Pelletier, 2004](#) ont évité le problème de la particularisation de la forme de dépendance des violations mais se sont retrouvés dans une autre forme de particularisation : celle de la dépendance pour les durées.

En effet, ce test repose sur la modélisation classique de la durée, D_i , entre deux violations successives.

L'hypothèse d'IND devient :

$$\begin{cases} H_0 : D_i \rightsquigarrow \mathcal{G}(\alpha) : \text{Loi géométrique,} \\ H_1 : D_i \rightsquigarrow \mathcal{W}(a, b) : \text{Loi Weibull.} \end{cases}$$

où : a et b sont, respectivement, les paramètres de centrage et d'échelle.

Puisque la loi exponentielle est une approximation continue de la loi géométrique, de même paramètre, l'hypothèse d'IND s'écrit : $H_0 : D_i \rightsquigarrow \mathcal{E}(\alpha)$.

En d'autres termes,

$$\begin{cases} H_0 : f(d_i; \alpha) = \alpha e^{-\alpha d_i}, \\ H_1 : g(d_i; a, b) = a^b b d_i^{b-1} e^{(-ad_i)^b}, \end{cases} \quad \text{ou encore,} \quad H_0 : b = 1.$$

La statistique du test est la suivante : $LR_{dure}^{IND} = 2(l_1 - l_0)$,

où : l_0 et l_1 représentent les log-vraisemblances obtenues avec la loi Weibull sous les contraintes H_0 et H_1 .

Si $LR_{dure}^{IND} > \chi_{1-\alpha}^2(1)$, on rejette H_0 .

2.6.3 Test de couverture conditionnelle

2.6.3.1 Test de Christoffersen conditionnelle

Christoffersen, 1998 suppose que, sous l'hypothèse de CC, le processus des violations $I_{t+1}(\alpha)$ peut être modélisé par une chaîne de Markov ayant la même matrice des probabilités de transition Π .

L'hypothèse de CC devient :

$$H_0 : \Pi = \Pi_\alpha = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

La statistique du test est la suivante :

$$LR^{CC} = 2 \left[\text{Log}((1 - \pi_{01})^{u_{00}} \pi_{01}^{u_{01}} (1 - \pi_{11})^{u_{10}} \pi_{11}^{u_{11}}) - \text{Log}(\alpha^U (1 - \alpha)^{T-U}) \right].$$

Si $LR^{CC} > \chi_{1-\alpha}^2(2)$, on rejette H_0 .

Nous pouvons vérifier que : $LR^{CC} = LR^{IND} + LR^{CNC}$.

2.6.3.2 Test CAViaR

Engle et Manganelli, 2004 propose d'utiliser un modèle de régression linéaire généralisé CAViaR (Conditional Autoregressive Value-at-Risk) liant les violations courantes aux violations passées de sorte à ramener les tests de

backtesting à de simples tests paramétriques. En parallèle, [Patton, 2002](#) a suggéré une extension qui consiste à considérer un modèle dichotomique (probit ou logit) liant les violations courantes aux violations passées puisque le modèle de régression linéaire n'est pas le plus adapté lorsque la variable dépendante est dichotomique du fait des problèmes d'hétéroscédasticité (voir [Gouriéroux, 2000](#)). Depuis, [Berkowitz, Christoffersen et Pelletier, 2005, 2009](#) a combiné ces deux dernières techniques pour profiter de l'avantage des deux. Cette dernière méthode a connu des extensions dont la plus connue est la méthode binaire dynamique (Dynamic Binary Response) de [Dumitrescu, Hurlin et Pham, 2012](#) que nous allons considérer ici.

L'avantage principal de ce modèle est qu'il nous permet de tester les deux hypothèses d'IND et de CC.

L'hypothèse de CC devient :

$$H_0 : E[I_{t+1}(\alpha) | \mathcal{I}_t] = P[I_{t+1}(\alpha) = 1 | \mathcal{I}_t] = F(w_{t+1}),$$

où : $F(\bullet) = \frac{1}{1+e^{-\bullet}} = \frac{e^\bullet}{1+e^\bullet}$: Distribution logistique, et w_t la représentation autoregressive générale suivante :

$$w_{t+1} = c + \sum_{j=1}^{q_1} \beta_j w_{t+1-j} + \sum_{j=1}^{q_2} \delta_j I_{t+1-j}(\alpha) + \sum_{j=1}^{q_3} \psi_j VaR_{t+1-j} + \sum_{j=1}^{q_4} \gamma_j VaR_{t+1-j} I_{t+1-j}.$$

Les auteurs proposent sept spécifications. Nous choisirons, dans le cadre de ce mémoire, la structure binaire dynamique ci-dessous qui dérive du modèle CAViaR de [Engle et Manganelli, 2004](#) :

$$w_{t+1} = c + \beta_1 w_t + \psi_1 VaR_t.$$

Plus spécifiquement, l'hypothèse de CC s'écrit :

$$H_0 : \beta = 0, \delta = 0, \psi = 0, \gamma = 0, c = F^{-1}(\alpha).$$

La statistique du test est la suivante :

$$DB_{LR^{CC}} = 2[l(\hat{\Omega}, \hat{c}; I_{t+1}(\alpha), Z_{t+1}) - l(0, c; I_{t+1}(\alpha), Z_{t+1})],$$

où : $\Omega = [\beta', \delta', \psi', \gamma']$ et Z_{t+1} le vecteur des variables explicatives à $t + 1$,

et :

$$l(\Omega; I(\alpha), Z) = \sum_{t=1}^{T-1} [I_{t+1}(\alpha) \text{Log } F(w_{t+1}(\Omega, Z_{t+1})) + (1 - I_{t+1}(\alpha)) \text{Log}(1 - F(w_{t+1}(\Omega, Z_{t+1})))].$$

Dépendamment de w_{t+1} , on a après quelques itérations :

$$\begin{cases} l(\hat{\Omega}, \hat{c}; I_{t+1}(\alpha), Z_{t+1}) = \sum_{t=1}^{T-1} [(I_{t+1}(\alpha) - 1) w_{t+1} - \text{Log}(1 + e^{-w_{t+1}})], \\ l(0, c; I_{t+1}(\alpha), Z_{t+1}) = \sum_{t=1}^{T-1} [(I_{t+1}(\alpha) - 1) c - \text{Log}(1 + e^{-c})]. \end{cases}$$

où l'expression de c est donnée par :

$$\begin{cases} c = F^{-1}(\alpha) \Rightarrow \alpha = F(c), \\ \alpha = \frac{U}{T}, \\ F(c) = \frac{1}{1+e^{-c}}, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad c = -\text{Log}\left(\frac{T}{U} - 1\right).$$

Si $DB_{LRCC} > \chi_{1-\alpha}^2(\dim(Z_{t+1}))$, on rejette H_0 .

2.6.4 Test de durée par GMM

Candelon, Colletaz, Hurlin et Tokpavi, 2008, 2009, 2011 étendent le cadre suggéré par Bontemps et Meddahi, 2005, 2006 et Bontemps, 2006 en proposant une démarche différente pour les tests de durée, fondée sur un test GMM (generalized method of moments), qui permet de ne pas spécifier de distribution particulière sur les alternatives et teste si la durée entre deux violations successives, $D_i = t_i - t_{i-1}$, est distribuée géométriquement. Cette approche présente différents avantages. En effet, elle est facile à implémenter, n'a besoin que de quelques contraintes améliorant ainsi la crédibilité des tests, permet un traitement optimal du problème associé à l'incertitude des paramètres, et aide à élaborer des tests séparés de CNC, IND et CC de durée en exploitant des conditions sur le moment, chose qui n'était pas possible avec les tests de durée classiques. Le choix des moments s'aide de l'utilisation d'un polynôme orthonormé particulier.

Associé à la distribution géométrique, $f(d_i; \beta) = \beta(1-\beta)^{d_i-1}$, $\forall d_i \in \mathbb{N}^*$, le polynôme orthonormé est défini par la relation réursive suivante :

$$M_{j+1}(d_i; \beta) = \frac{(1-\beta)(2j+1) + \beta(j-d_i+1)}{(j+1)\sqrt{1-\beta}} M_j(d_i; \beta) - \left(\frac{j}{j+1}\right) M_{j-1}(d_i; \beta),$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \text{ avec : } M_{-1}(d_i; \beta) = 0 \text{ et } M_0(d_i; \beta) = 1.$$

Pour l'ordre $j = 1, \dots, 6$, on vérifie que :

$$\begin{cases} M_1(d_i; \beta) = \frac{(1-\beta d_i)}{\sqrt{1-\beta}}, \\ M_2(d_i; \beta) = \frac{(3-\beta-\beta d_i)(1-\beta d_i)}{(2-2\beta)} - \frac{1}{2}, \\ M_3(d_i; \beta) = \frac{(5-2\beta-\beta d_i)}{3\sqrt{1-\beta}} M_2(d_i; \beta) - \frac{2}{3} M_1(d_i; \beta), \\ M_4(d_i; \beta) = \frac{(7-3\beta-\beta d_i)}{4\sqrt{1-\beta}} M_3(d_i; \beta) - \frac{3}{4} M_2(d_i; \beta), \\ M_5(d_i; \beta) = \frac{(9-4\beta-\beta d_i)}{5\sqrt{1-\beta}} M_4(d_i; \beta) - \frac{4}{5} M_3(d_i; \beta), \\ M_6(d_i; \beta) = \frac{(11-5\beta-\beta d_i)}{6\sqrt{1-\beta}} M_5(d_i; \beta) - \frac{5}{6} M_4(d_i; \beta). \end{cases}$$

L'hypothèse générale du test, dans les trois cas (CNC, IND et CC), s'écrit :

$$H_0 : d_i \rightsquigarrow \mathcal{G}(\beta) : E[M_j(d_i; \beta)] = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \forall d_i \in \mathbb{N}^*.$$

Soit, $\{d_i\}_1^N$, une séquence de N durées entre deux violations successives observées pendant la période T .

Selon que le test soit de CNC, IND ou CC, la probabilité de succès, β , s'écrit :

$$\begin{cases} \beta^{CNC} = \alpha, \\ \beta^{IND} = \frac{N}{T} \neq (\text{ou}) \alpha, \\ \beta^{CC} = \alpha. \end{cases}$$

L'hypothèse du test, pour chaque cas, devient :

$$\begin{cases} H_0^{CNC} : d_i \rightsquigarrow \mathcal{G}(\alpha) : E[M_1(d_i; \alpha)] = 0, \quad \forall d_i \in \mathbb{N}^*, \\ H_0^{IND} : d_i \overset{iid}{\rightsquigarrow} \mathcal{G}\left(\frac{N}{T}\right) : E\left[M_j\left(d_i; \frac{N}{T}\right)\right] = 0, \quad \forall j = \{1, \dots, p\}, \quad \forall d_i \in \mathbb{N}^*, \\ H_0^{CC} : d_i \overset{iid}{\rightsquigarrow} \mathcal{G}(\alpha) : E[M_j(d_i; \alpha)] = 0, \quad \forall j = \{1, \dots, p\}, \quad \forall d_i \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

où : p est la condition sur le degré du moment, avec $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

En combinant l'hypothèse H_0 avec l'expression du premier polynôme $M_1(d_i; \beta)$, dans les trois genres de tests, on peut trouver, aisément, l'expression de l'espérance des durées suivante :

$$\begin{cases} H_0^{CNC} : & E[d_i] = \frac{1}{\alpha}, \\ H_0^{IND} : & E[d_i] = \frac{1}{\beta}, \\ H_0^{CC} : & E[d_i] = \frac{1}{\alpha}. \end{cases}$$

Ceci à partir du fait que le premier polynôme, $M_1(d_i; \beta)$, est inclus dans la série récursive des conditions sur les moments.

Par Hansen, 1982, nous savons que :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M_j(d_i; \alpha) \right)^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi_{1-\alpha}^2(1).$$

Dans un contexte iid, ce moment est asymptotiquement indépendant avec une variance unitaire et la statistique de chaque test est donnée par :

$$\begin{cases} J_{CNC}(p) = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M_1(d_i; \alpha) \right)^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi_{1-\alpha}^2(1), \\ J_{IND}(p) = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \beta) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \beta) \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi_{1-\alpha}^2(p), \\ J_{CC}(p) = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \alpha) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \alpha) \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi_{1-\alpha}^2(p), \end{cases}$$

où : $M(\bullet)$ est un vecteur de dimension $(p, 1)$ dont les composants sont les polynômes orthonormaux $M_j(\bullet)$, $\forall j = 1; \dots, p$.

Cette section met fin à la première partie de ce mémoire. Dans la suite, nous mettons en pratique la théorie que nous venons d'évoquer en prenant comme exemple d'application le marché pétrolier américain WTI (West Texas Intermediate). Le but sera de déterminer et étudier l'apport d'un processus ARMA-GARCH tiré des données en comparaison avec celui par défaut utilisé dans la littérature, de considérer les changements de régimes et d'analyser chaque sous-période à part pour enlever la dépendance entre ces derniers dont

les régimes sont différents, de modéliser la perte maximale (le profit minimal) à l'aide de la VaR par différentes méthodes, et de comparer ces dernières par quelques tests de backtesting afin de valider les modèles et de savoir lequel qui s'ajuste en mieux au rendement du pétrole.

CHAPITRE III

ANALYSE EMPIRIQUE : APPLICATION SUR LE RENDEMENT DE LA SÉRIE WEST TEXAS INTERMEDIATE (WTI)

Le marché du pétrole est le plus grand marché des matières premières dans le monde. La consommation mondiale a atteint un record de 92.5 millions de barils par jour en 2014, d'après l'Agence Internationale de l'Energie (AIE). Dans notre mémoire, nous allons nous intéresser au prix du WTI (West Texas Intermediate). La série de données couvre la période allant du 2 Janvier 1986 au 5 Mai 2014, pour un total de 7150 observations. Cette série a été influencée, tout au long de cette période, par de nombreux chocs macro-économiques (La guerre du Golfe en 1990, la crise financière et économique de 1997, le drame du "World Trade Center" en 2001, le 3^{ème} choc pétrolier de Septembre 2003 à Juin 2008, et le jeu de l'offre et de la demande à partir de 2011). Cependant, la période retenue est marquée tant par une forte augmentation que par une diminution de prix, reflétant ainsi une hausse importante de la volatilité du prix de pétrole.

La figure 3.1 donne la tendance de la série du prix de pétrole sur la période analysée par trois types de lissages (régression linéaire (lm), régression locale (loess), régression locale à régimes (loess à régimes)). Elle indique que cette dernière a connu de sérieuses fluctuations, oscillant entre 10.25 et 145.3 dollars le baril. Nous remarquons, aussi, que le prix a connu une stabilité dans les années 90, mis à part le pic d'inflation à la moitié de 1990 qui a été suivi par une reprise

quelques mois après. Au delà de cette période, nous observons une instabilité plus nette, surtout en 2008, et une tendance haussière.

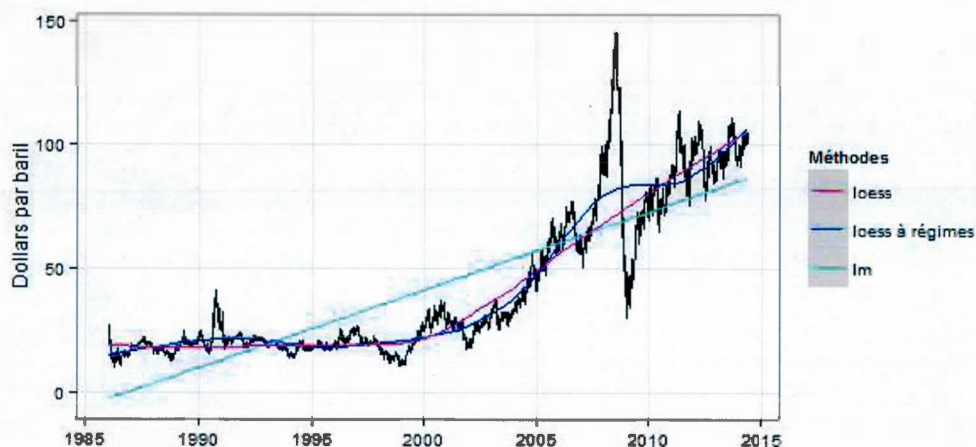


Figure 3.1 : Prix journalier du pétrole brut WTI (\$US par baril)

McNeil et Frey, 2000 et Gençay et al., 2003 ont stipulé qu'à cause de cette régularité dans la série (clusters de volatilité), il est pratiquement impossible d'examiner le modèle filtré (le modèle ARMA-GARCH) approprié chaque jour et de choisir la meilleure paramétrisation. Pour remédier à ce problème, différents auteurs supposent la spécification avec un jour de retard tel que $AR(1)$ -GARCH(1,1) sans pour autant justifier ce choix (voir par exemple Trabelsi, Raggad et Marimoutou, 2009). Dans ce mémoire, la solution proposée reposera sur trois étapes. La première sera de diviser la série originale en sous-périodes selon le régime et d'étudier chacune à part. La deuxième sera de suivre la procédure, assez connue, de Box et Jenkins, 1970 afin d'identifier le modèle adéquat pour chaque sous-période. La troisième étape consistera à choisir le seuil (ou du nombre d'observations extrêmes, plus précisément) de la modélisation de la GPD en suivant un nombre de techniques décrites par Embrechts, Kluppelberg et Mikosch, 1997 et Reiss et Thomas, 1997.

3.1 Analyse du changement structurel de la série des rendements

Le tableau 3.1 suivant donne, par ordre, les résultats du test de Chow au niveau de signification de 5%, le test RE, le test RE-CUSUM et le test OLS-CUSUM. Ils indiquent clairement la présence de changements structurels sans pour autant être précis sur les dates de rupture et parfois ne considèrent qu'un seule. Pour gagner en précision, la conjugaison des deux critères à minimiser, le BIC et l'algorithme de programmation dynamique qui permet de minimiser la somme des carrés des résidus du modèle supposé de régression linéaire, donne lieu à trois points de rupture (breakpoints) qui correspondent chacune à une date de rupture (breakdates) (voir tableau 3.2). Les figures 3.2 et 3.3 illustrent tous ces résultats.

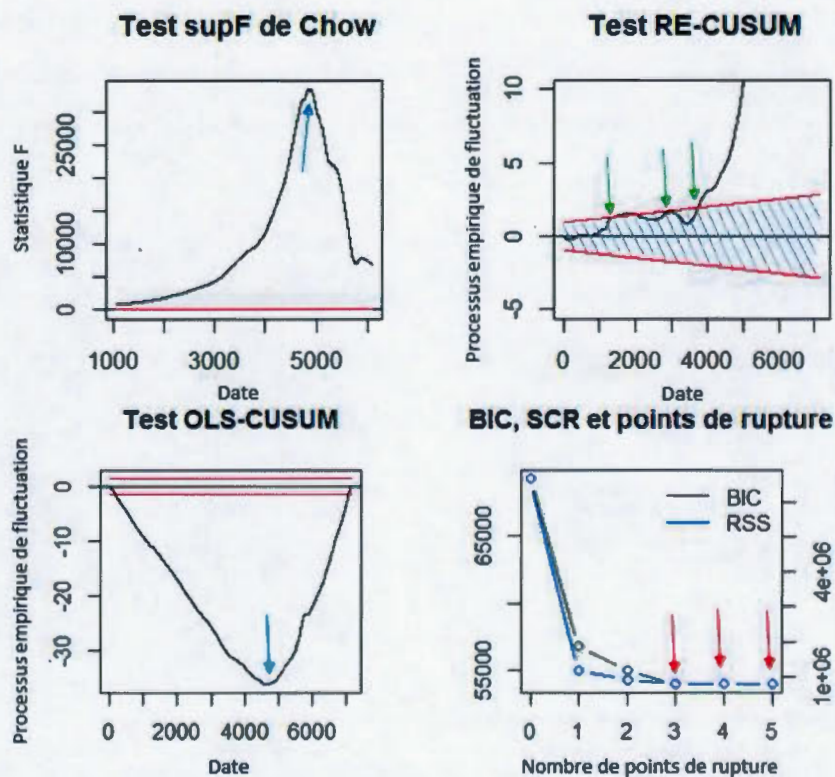


Figure 3.2 : Tests de changements structurels et points de rupture

Tableau 3.1 : Résultats des tests de changements structurels

33374.97(0*)	36.205(0*)	21.232(0*)	36.205(0*)
--------------	------------	------------	------------

* Les chiffres entre parenthèses représentent les p-value.

Tableau 3.2 : Points et dates de rupture

	Rupture 1	Rupture 2	Rupture 3
Points de rupture	3518	4835	6077
Dates de rupture	12 Novembre 1999	23 Février 2005	2 Février 2010

Ces dates de ruptures tournent autour de quelques événements historiques. Le 1^{er} est lié à l'accélération économique mondiale à la fin de l'année 1999 en raison de politiques monétaires expansionnistes pour contrer le bogues de cette année. Le 2^{ème} est lié au processus mondiale de sous-traitance (offshoring), où la capacité de production manufacturière mondiale est progressivement relocalisée dans les pays où les coûts de production sont inférieurs causant ainsi une augmentation effrénée de la dépenses en capital de la Chine et ceci en parallèle avec l'émergence de cette dernière économiquement et sa modernisation. Le 3^{ème} est lié à l'arrêt de la production comme réaction à la récession mondiale de 2008 avec l'annonce d'un prix cible de 80.

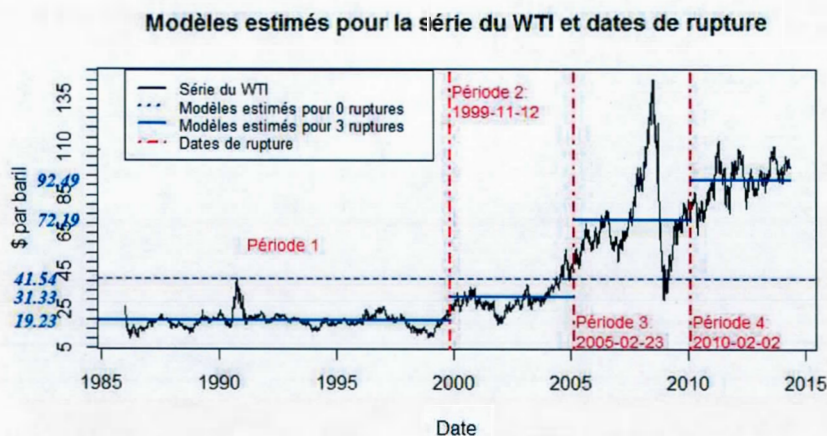


Figure 3.3 : La série du WTI à travers les régimes

Ceci implique l'existence de quatre sous-périodes correspondant à 4 régimes différents (du 2 Janvier 1986 au 11 Novembre 1999, du 12 Novembre 1999 au 22 Février 2005, du 23 Février 2005 au 1 Février 2010 et du 2 Février 2010 au 5 Mai 2014). Donc, au lieu d'étudier la série entière, comme c'est le cas dans de nombreux travaux, nous allons plutôt, par la suite, nous concentrer sur chaque régime pris individuellement. Nous éviterons ainsi la généralisation qui, en combinant diverses périodes différentes les unes des autres risque de biaiser nos résultats. D'après la figure 3.3, nous remarquons aussi que si nous estimons par régression linéaire chaque régime, nous aurons une moyenne du prix de baril de 19.23, 31.33, 72.19 et 92.49, respectivement, de la période 1 à la période 4. Cette moyenne est différente de la moyenne de la série entière estimée par régression linéaire, 41.54.

Nous calculons le logarithme du rendement, $\mu_t = \ln(1 + r_t) = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)$, de 7148 observations, que nous noterons, à titre de simplification, le rendement r_t pour la suite de cette étude, et dont la tendance est donnée par la figure 3.4. Cette dernière montre des sous-périodes de volatilité extrêmes (ou moyennes), qui conduisent à une succession de grands rendements positifs et négatifs dans un court laps de temps. Elle montre aussi que le rendement est stationnaire et suggère la modélisation de la volatilité temporelle par un GARCH du moment où nous assistons à une dépendance périodique puisque de grands changements sont suivis par de grands changements et les petits sont suivis par des petits.

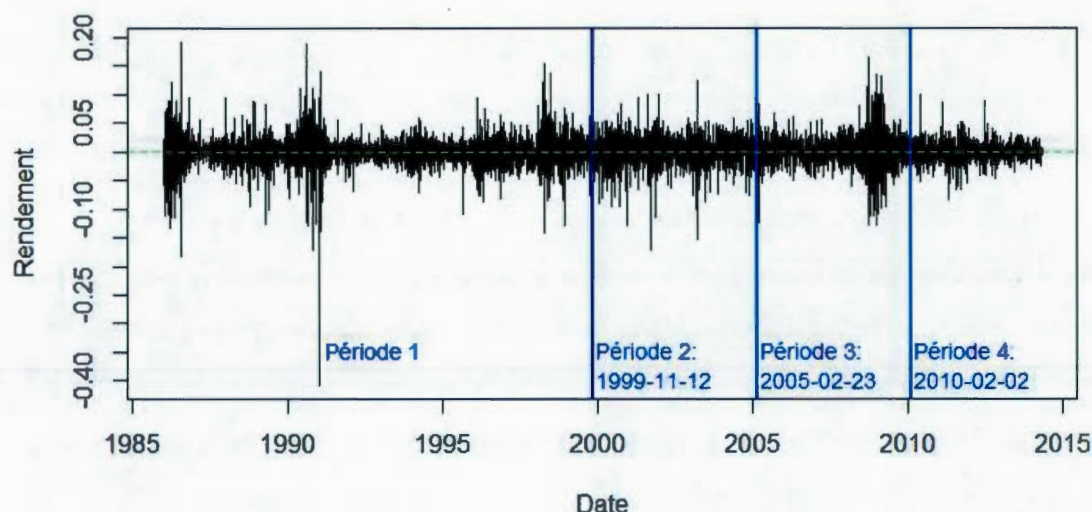


Figure 3.4 : Rendement du prix du WTI par régime

La table 3.3 fournit quelques statistiques descriptives sur toute la période en les comparant avec celles des sous-périodes. Le test d'autocorrélation de Box-Pierce montre qu'on rejette l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélation sur 20 retards et un seuil de signification de 5%, confirmant ainsi la présence d'hétéroscédasticité conditionnelle sauf pour les périodes 2 et 4. De façon similaire, le test de Jarque-Bera rejette la normalité, avec un coefficient d'asymétrie négatif et un coefficient d'aplatissement plus élevé que celui de la loi normale.

Tableau 3.3 : Statistiques descriptives sur les rendements journaliers du WTI

	Série	Période 1	Période 2	Période 3	Période 4
Moyenne (%)	0.019	$-7.3 \cdot 10^{-4}$	0.055	0.032	0.024
Écart type (%)	2.524	2.595	2.629	2.787	1.702
Min (%)	-40.64	-40.64	-17.09	-12.83	-8.535
Max (%)	19.15	19.15	12.44	16.41	9.898
Skewness	-0.765	-1.211	-0.614	-0.045	0.015
Kurtosis	18.095	26.367	6.733	7.416	6.365
Jarque-Bera	68607.2(0)	61647.1(0)	112.25(0)	104.22(0)	5.98(0)
Box-Pierce	69.29(0)	66.37(0)	23.36(0.3)	71.23(0)	15.50(0.8)
Ljung-Box	69.38(0)	66.52(0)	23.6(0.3)	71.85(0)	15.75(0.7)

Les chiffres entre parenthèses représentent les p-value.

La fluctuation de l'écart-type, journalier (σ_j) et annualisé (σ_a), de chaque période, est donnée dans le tableau 3.4 et la figure 3.5. Ils sont calculés à partir des deux formules suivantes :

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n-1}}, \quad \sigma_a = \sqrt{n} \times \sigma_j,$$

où : n : Nombre de rendements journaliers par année.

Les plus grandes variations de la volatilité se trouvent dans la période 1 et 3. Le modèle GARCH serait, donc, plus approprié pour ces deux périodes.

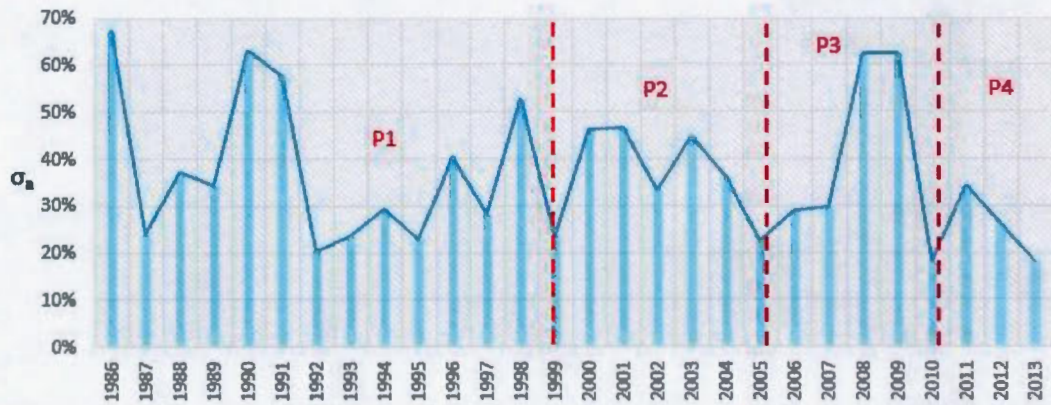


Figure 3.5 : Écart-type (%) annualisé de toute la série

La figure 3.6 illustre le boxplot de la série des rendements pour les quatre périodes en montrant à chaque fois le nombre de valeurs extrêmes négatives et positives.

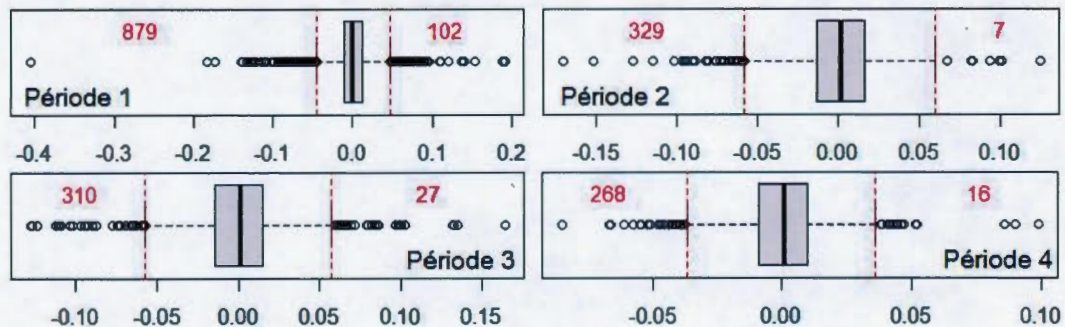


Figure 3.6 : Boxplot sur les rendements - Période 1 à 4

Comme nous avons vu, la série des rendements est incompatible avec la condition nécessaire de la théorie des valeurs extrêmes (EVT) car ces derniers sont iid. Pour remédier à ceci, il convient de filtrer les rendements avec un modèle GARCH pour obtenir une série essentiellement iid sur laquelle il sera facile d'appliquer les EVT. Pour ce faire, nous allons commencer par identifier le processus ARMA.

3.2 Modélisation ARMA de la série des rendements

Du moment où les tests de changements structurels et les statistiques descriptives ont prouvé l'existence de quatre sous-périodes indépendantes, l'étude portera sur la modélisation de la volatilité du rendements du WTI sur chacune de ces sous-périodes et non sur la série entière des rendements. Prenons, par la suite, le cas de la période 1 (voir annexes pour les sorties des autres périodes).

La démarche sur quatre étapes de [Box et Jenkins, 1970](#), pour le choix du modèle ARMA, ainsi que la procédure de choix et d'estimation du processus GARCH, sont les suivantes :

D'abord, d'après la figure 3.7, nous enregistrons la présence d'autocorrélation dans la période 1.

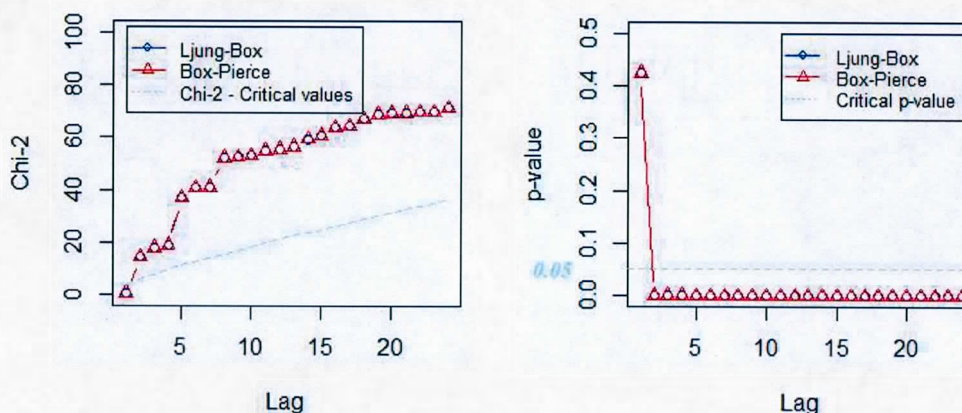


Figure 3.7 : Tests d'autocorrélation des rendements

L'identification du modèle passe, donc, par l'étude des corrélogrammes de la série des rendements, donnés par la figure 3.8. Ces derniers indiquent qu'il faut retenir, à priori, un des processus suivants :

$ARMA(0,0)$, $ARMA(0,|2|)$, $ARMA(0,|3|)$, $ARMA(0,|5|)$, $ARMA(|2|,0)$,
 $ARMA(|2|,|2|)$, $ARMA(|2|,|3|)$, $ARMA(|2|,|5|)$, $ARMA(|3|,0)$, $ARMA(|3|,|2|)$,
 $ARMA(|3|,|3|)$, $ARMA(|3|,|5|)$, $ARMA(|5|,0)$, $ARMA(|5|,|2|)$, $ARMA(|5|,|3|)$,
 $ARMA(|5|,|5|)$, $ARMA(|8|,0)$, $ARMA(|8|,|2|)$, $ARMA(|8|,|3|)$, $ARMA(|8|,|5|)$.

L'estimation de ces processus indique que les coefficients sont significatifs pour tous les modèles sauf : $ARMA(0,0)$, $ARMA(|2|,|2|)$, $ARMA(|3|,|3|)$, $ARMA(|5|,|5|)$. Cependant le t-test sera biaisé si les résidus de tous les processus ne sont pas des BB .

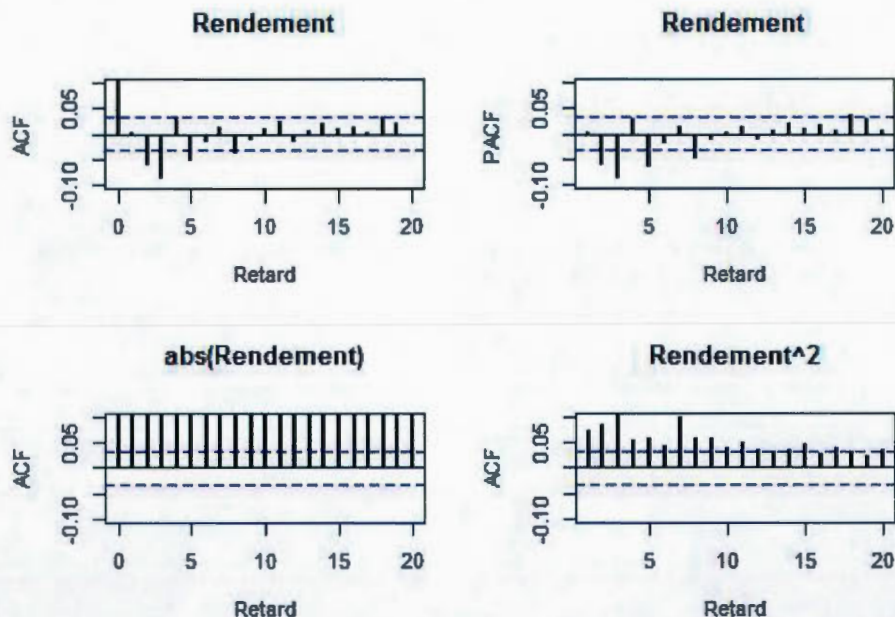


Figure 3.8 : Analyse des corrélogrammes de la série des rendements de la période 1

L'étape de validation vient vérifier ceci. Si l'analyse des corrélogrammes des résidus pour tous les processus indique qu'il n'y a pas d'autocorrélations significatives

entre les résidus et si les tests de Ljung-Box et Box-Pierce indiquent des p -value $< 5\%$, alors on rejette H_0 : absence d'autocorrélation. Nous pourrions dire que le résidu n'est pas un bruit blanc. Le t -test est biaisé pour un tel processus, qui ne sera donc pas retenu pour l'étape suivante. Les figures et tests de Ljung-Box et Box-Pierce pour chaque processus et leur corrélogrammes indiquent que le meilleur processus est $\text{ARMA}(|2|,|3|)$ puis en second lieu le processus $\text{ARMA}(|5|,|3|)$. En effet, les graphiques Ljung-Box et Box-Pierce indiquent que les p -value sont $< 5\%$ pour tous les processus si nous prenons un retard $L = 10$, mais le meilleur processus est le $\text{ARMA}(|2|,|3|)$ avec un graphe qui indique que les p -value des $L \leq 4$ sont $> 5\%$. Ceci est confirmé par les corrélogrammes des résidus qui contiennent des autocorrélations significatives mais moins pour ce dernier processus. En plus, les tests de Ljung-Box et Box-Pierce globales pour chaque modèle indiquent un p -value $< 5\%$ pour tous avec un $L = 20$. En diminuant L à 2 pour les uns et à 1 pour les autres, dépendamment des graphes cités ci-haut, les p -value augmentent jusqu'à dépasser 5% , sauf pour le modèle retenu précédemment où il suffit de diminuer L à 4 pour dépasser 5% . Donc, les résidus pour tous les modèles sont des \mathcal{BB} , ce qui nous ramène à dire que le t -test effectué sur les paramètres n'est pas biaisé. Puisque les processus $\text{ARMA}(|2|,|3|)$ et $\text{ARMA}(|5|,|3|)$ sont significatifs par le t -test, après avoir enlevé la constante car elle n'était pas significative, et ont aussi les plus grandes valeurs par les tests globales de Ljung-Box et Box-Pierce, nous retenons donc ces deux modèles pour l'étape d'après. Ci-dessous, nous pouvons voir les résultats pour les processus $\text{ARMA}(|2|,|3|)$ et $\text{ARMA}(|5|,|3|)$:

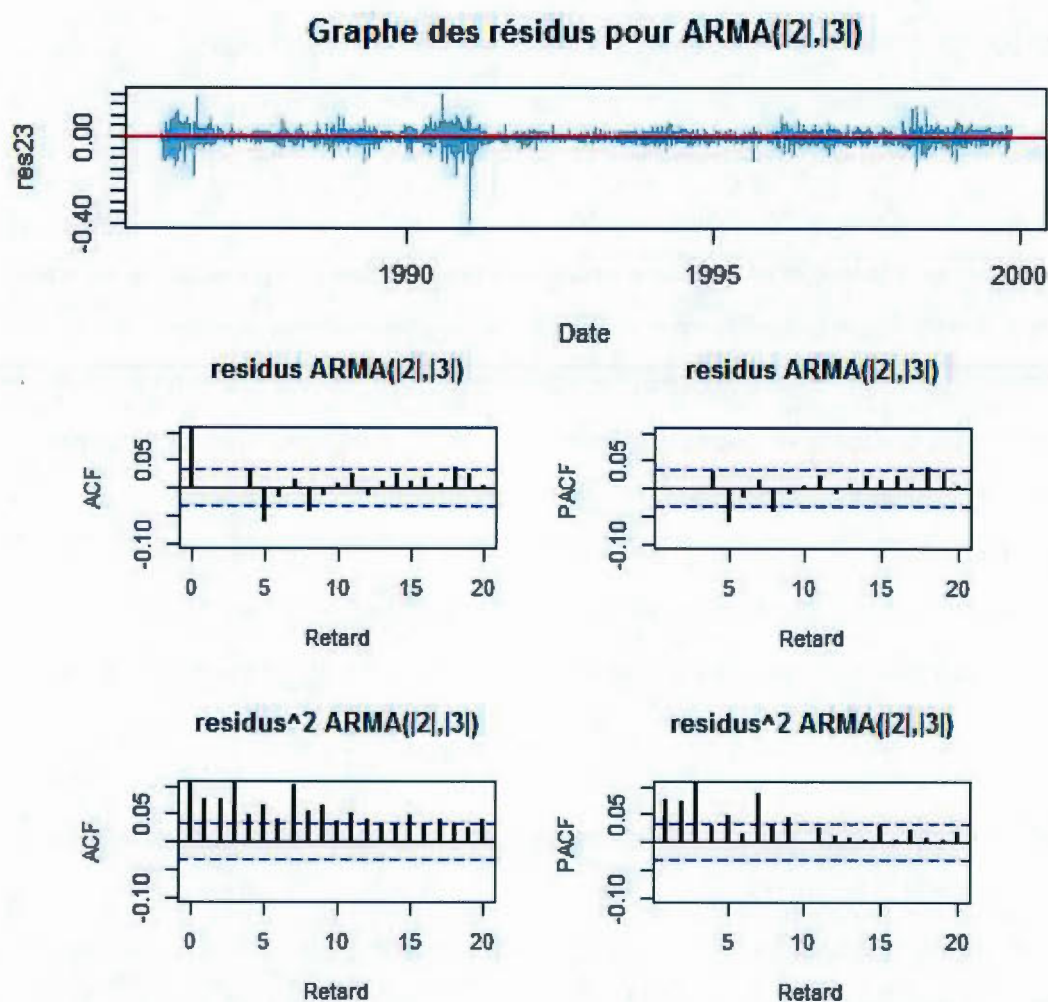


Figure 3.9 : Corréllogrammes des résidus du ARMA(|2|,|3|) de la période 1

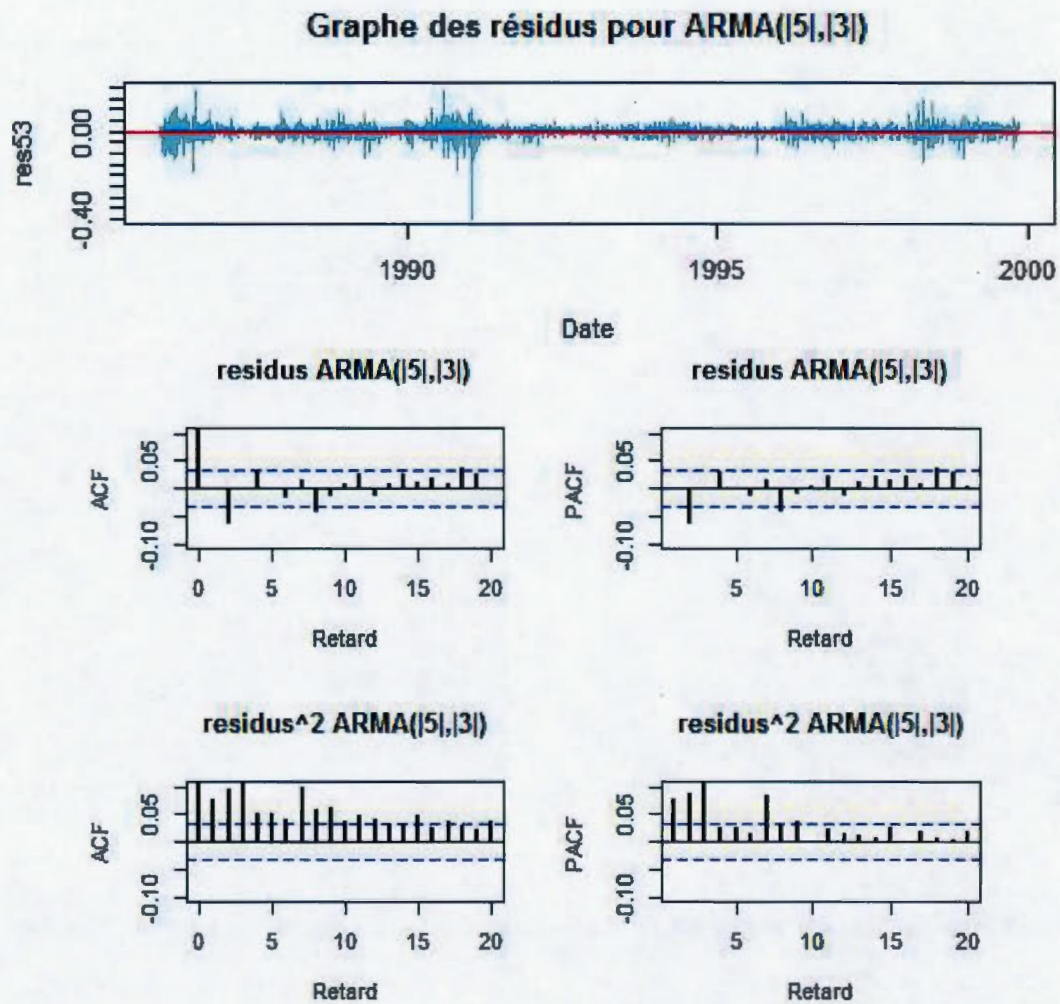


Figure 3.10 : Corréllogrammes des résidus du ARMA(|5|,|3|) de la période 1

Tableau 3.5 : Tests d'autocorrélation globale des résidus de la période 1

	ARMA(2 , 3) _{L=4}	ARMA(5 , 3) _{L=1}
Box-Pierce	0.02(0.999*)	0(0.985*)
Ljung-Box	0.02(0.999*)	0(0.985*)

* Les chiffres entre parenthèses représentent les p-value.

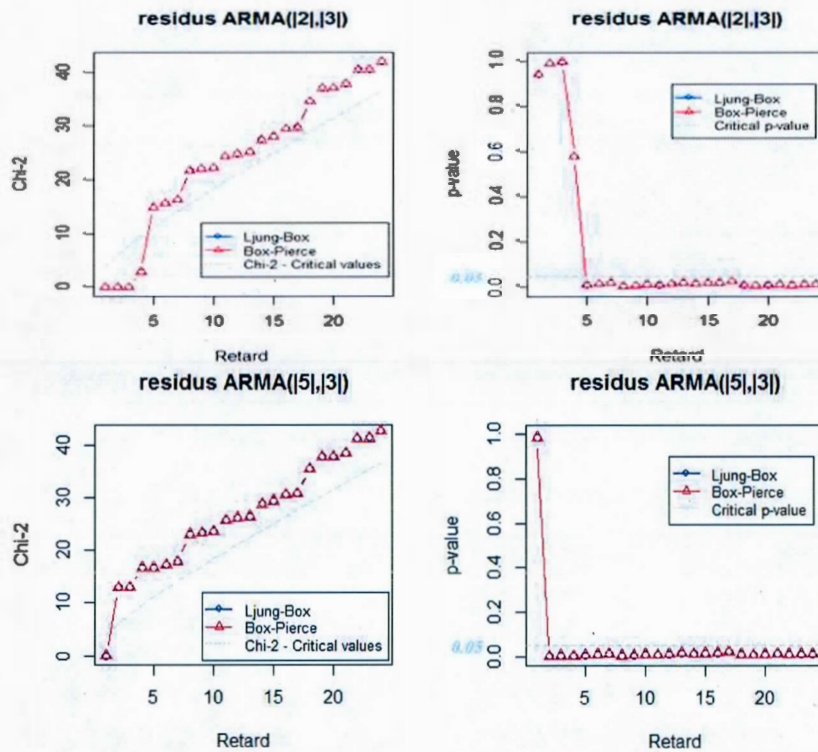


Figure 3.11 : Tests d'autocorrélation des résidus de la période 1

Les mêmes procédures que les précédentes sont appliquées pour les quatre périodes (voir annexes A et B pour le reste des périodes). Voici les processus retenus pour chacune des trois périodes qui restent :

2^{ème} période : $ARMA(0, |6|)$, $ARMA(|6|, 0)$,

3^{ème} période : $ARMA(|3|, |5|)$, $ARMA(|5|, |3|)$,

4^{ème} période : $ARMA(0, |15|)$, $ARMA(|15|, 0)$.

Les modèles qui ont survécu à l'étape de validation, pour chaque période, vont passer par des critères d'information AIC et LL (log-vraisemblance) et par le test LR (ratio de vraisemblance). Le résultat de ces derniers est donné dans le tableau 3.6.

Tableau 3.6 : Choix du processus final pour chaque période

	Période 1		Période 2	
ARMA	$(2 , 3)_b$	$(5 , 3)_a$	$(0, 6)_b$	$(6 ,0)_a$
AIC	-15736.425	-15735.519	-5846.216	-5845.861
LL	7872.212	7871.759	2926.108	2925.930
LR_{b-a}	0.906(0.659*)		0.355(0.449*)	
	Période 3		Période 4	
ARMA	$(5 , 3)_b$	$(3 , 5)_a$	$(0, 15)_b$	$(15 ,0)_a$
AIC	-5385.449	-5384.158	-5692.066	-5691.892
LL	2696.725	2696.079	2849.033	2848.946
LR_{b-a}	1.292(0.744*)		0.174(0.323*)	

* Les chiffres entre parenthèses représentent les p-value.

Pour les quatre périodes, les critères AIC et LL favorisent le processus non contraint (b), sauf que le test LR favorise le modèle contraint (a). Sous les résultats précédents, nous avons le choix pour chaque période de sélectionner le processus qui remplit le plus de critères par rapport à l'autre. Finalement, les processus choisis, sont $ARMA(|5|,|3|)$, $ARMA(|6|,0)$, $ARMA(|5|,|3|)$ et $ARMA(|15|,0)$ pour, respectivement, les périodes 1, 2, 3 et 4.

À titre illustratif, une prévision sur 20 jours des rendements, sur leurs intervalles de confiance à 5%, à partir du processus ARMA pour chaque période, est donnée par la figure 3.12 où nous n'avons pris que les 100 dernières observations pour chaque période.

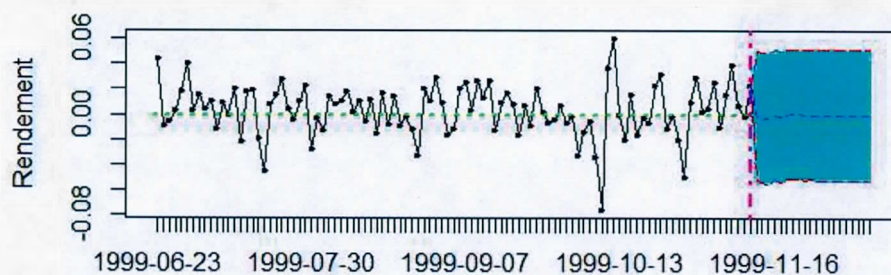


Figure 3.12 : Valeurs actuelles et prédites du rendement de la période 1

Nous remarquons que dans les périodes les plus volatiles (surtout la période 4), la prévision met plus de jours pour se stabiliser et éliminer le choc des retards pris dans le processus ARMA.

3.3 Modélisation de la volatilité de la série des rendements

La partie gauche de la figure 3.13 illustre la non normalité de la série des rendements sur la période 1 puisque la distribution a une longue queue relative à une distribution asymétrique et un kurtosis plus ou moins élevé aux extrémités. Nous reviendrons sur cette figure, dans la section d'après, pour plus de détails. De plus, sur le QQ-plot à droite de la figure 3.13, nous voyons clairement que les quantiles de la distribution empirique des rendements n'est pas une transformation linéaire de la distribution supposée normale, sur les extrémités. La distribution est, par évidence, différente de celle d'une loi normale, $\mathcal{N}(\hat{m}, \hat{\sigma})$, de même moyenne, $\hat{m} = -7.3 \times 10^{-4}\%$, et écart-type, $\hat{\sigma} = 2.595\%$, que la série des rendements.

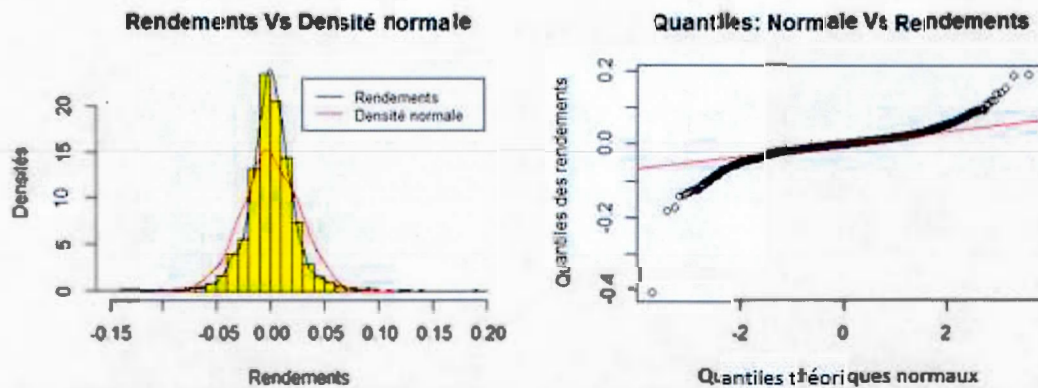


Figure 3.13 : Analyse de la normalité des rendements

Ceci indique probablement la présence de clusters de volatilité sur les queues de la distribution leptokurtique des résidus du modèle ARMA identifié. Chose qui est confirmée par le QQ-plot des résidus ARMA(|5|,|3|) de la figure 3.14.

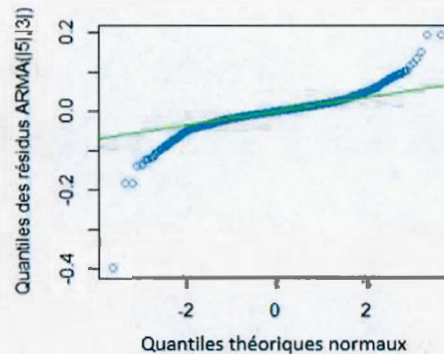


Figure 3.14 : Analyse de la normalité des résidus $\text{ARMA}(|5|,|3|)$

Afin de modéliser l'hétéroscédasticité sur les résidus des processus ARMA, ci-haut, nous allons procéder maintenant à estimer un processus GARCH après l'avoir identifié pour chaque période. L'identification par le corrélogramme des résidus au carré indique que les processus GARCH à retenir pour chaque période sont, respectivement, ARCH(4), ARCH(2), ARCH(6) et ARCH(3) car ce sont les plus petits modèles qui éliminent l'hétéroscédasticité (voir figure 3.15).

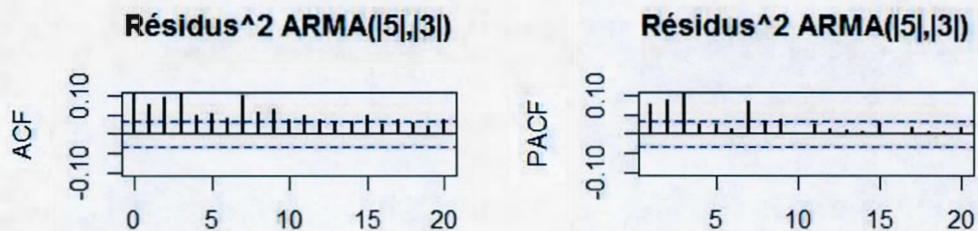


Figure 3.15 : Corrélogrammes des résidus au carré de la période 1

L'étape d'après consiste à estimer le processus ARMA-GARCH identifié, pour chaque période. Le tableau 3.7 présente le résultat des estimations du modèle retenu pour la période 1 (voir annexe C pour les autres périodes). Les deux paramètres du ARMA et de la volatilité ARCH sont significatifs.

Tableau 3.7 : Résultats de l'estimation ARMA-ARCH de la période 1

Période 1	Coefficients	SE	t-stat	p-value
ϕ_5	-0.0598*	0.0169	-3.5337	0.0004
θ_3	-0.0938*	0.0171	-5.4832	0
ω	0.0001*	0	10.2344	0
α_1	0.3610*	0.0275	13.1400	0
α_2	0.0567*	0.0054	10.4610	0
α_3	0.0031*	0.0006	5.0629	0
α_4	0.0152*	0.0048	3.1658	0.0015

* Les coefficients sont significatifs au niveau de confiance 1%.

Le tableau 3.8 examine l'adéquation du processus ARMA-ARCH, pour la période 1 (voir annexe C pour les autres périodes), à partir du test LM, de Jarque-Bera et de Ljung-Box. Nous voyons que l'hypothèse de normalité, l'absence d'autocorrélation et la présence d'homoscédasticité conditionnelle sont rejetés, pour les résidus standardisés du ARMA(|5|,|3|)-ARCH(4).

Tableau 3.8 : Diagnostic du ARMA-ARCH de la période 1

	73935.85(0)	0.628(0.428)	0.093(0.760)

Les chiffres entre parenthèses représentent les p-value.

Après avoir estimé le processus ARMA-GARCH, pour chaque période, nous utilisons la méthode de fenêtre glissante (rolling estimate) de 100 jours pour avoir une prévision de la VaR.

3.4 Détermination du nombre d'observations extrêmes de la série des rendements

Retournons, à présent, à la figure 3.14 concernant la normalité de la série des rendements. L'analyse des valeurs extrêmes ne repose que sur la queue droite de la distribution des rendements. Par conséquent, nous travaillons avec la distribution

des rendements positifs où la queue droite représente les gains. La queue gauche, qui illustre les pertes, est examinée séparément à partir des observations de la queue droite, en multipliant par -1 . La figure 3.16 (voir annexe D pour les autres périodes), qui donne un zoom sur la queue droite de la figure 3.14, représente l'histogramme des rendements positifs. Elle indique que des réalisations extrêmes sont susceptibles d'être plus considérables que celles induites par une loi normale de même moyenne et écart-type que la série des rendements.

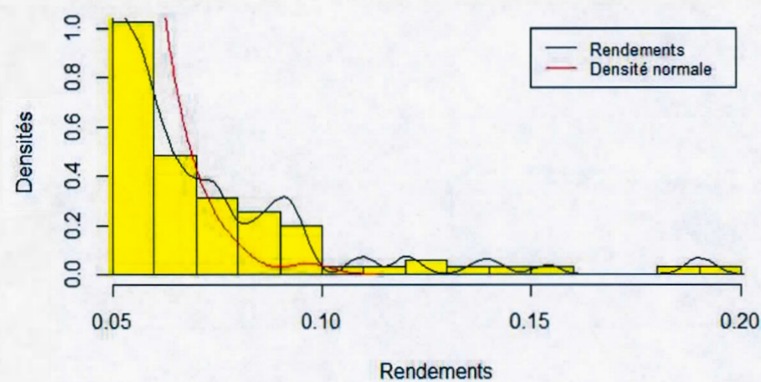


Figure 3.16 : Analyse de la normalité des rendements sur la queue droite

Les deux graphiques en haut de la figure 3.17 (voir annexe D pour les autres périodes) représentent la moyenne des excès dans la série des rendements pour les deux queues. La tendance positive au dessus du seuil $u = 0.012$, pour ces deux derniers, indique une large queue dans la distribution des pertes et des gains. Les deux autres graphiques, soit les graphiques de Hill pour les deux queues, donnent l'évolution de l'indice des queues, ζ , en fonction du nombre k d'observations extrêmes. L'estimateur de ζ doit être retenu dans la région de stabilité colorée en rose dans les graphiques. Nous choisissons ici $\hat{\zeta} = 50$ qui correspond à $u = 0.011$. Ce choix est motivé par l'obligation que k ne soit ni grand ni petit et par l'analyse de sensibilité de la VaR à l'augmentation de k . k doit être dans la région de la stabilité de la VaR. Le tableau 3.9 (voir annexe D pour les autres

périodes) donne la valeur de la VaR-GPD non conditionnelle pour différentes valeurs de k et de α . Nous voyons, du tableau, que la valeur de $k = 50$, choisie à partir du graphique de Hill, est dans la région de stabilité de la VaR.

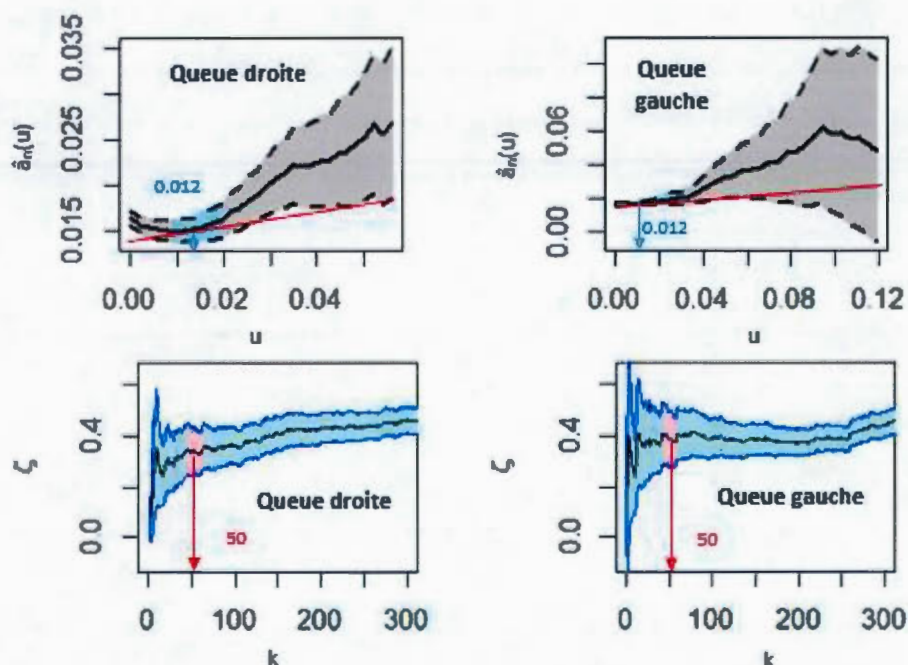


Figure 3.17 : Graphiques des excès et Hill de la série des rendements - période 1

Tableau 3.9 : Analyse de sensibilité à k de la $VaR^{GPD_{NC}}$

k	Queue droite - Période 1			Queue gauche - Période 1		
	u	$VaR_{99\%}^{GPD_{NC}}$	$VaR_{95\%}^{GPD_{NC}}$	u	$VaR_{1\%}^{GPD_{NC}}$	$VaR_{5\%}^{GPD_{NC}}$
20	0.021	7.030	4.353	0.021	-7.659	-4.664
30	0.019	7.012	4.337	0.019	-7.677	-4.698
40	0.015	6.999	4.358	0.015	-7.587	-4.724
50	0.012	6.950	4.407	0.012	-7.560	-4.725
60	0.009	6.922	4.449	0.009	-7.523	-4.748
70	0.006	6.889	4.477	0.006	-7.469	-4.769
80	0.004	6.832	4.502	0.004	-7.461	-4.785

À partir de k , le tableau 3.10 (voir annexe D pour les autres périodes) donne une statistique descriptive du résultat de l'estimation des paramètres de la GPD non

conditionnelle ainsi que la VaR-GPD non conditionnelle pour $\alpha = 1\%$ et 5% .

Tableau 3.10 : Statistiques descriptives des paramètres estimés de la $VaR^{GPD_{NC}}$

	50	50	50	50
Queue droite - Période 1				
$\hat{\xi}$	0.002	0.181	-0.756	0.479
$\hat{\lambda}$	0.014	0.006	0.005	0.032
$VaR^{GPD_{NC}}_{99\%}$	6.949	3.325	2.967	15.292
$VaR^{GPD_{NC}}_{5\%}$	4.407	1.789	2.206	9.734
Queue gauche - Période 1				
$\hat{\xi}$	-0.023	0.190	-0.585	0.473
$\hat{\lambda}$	0.015	0.006	0.006	0.034
$VaR^{GPD_{NC}}_{1\%}$	-7.560	4.422	-23.676	-2.324
$VaR^{GPD_{NC}}_{5\%}$	-4.725	2.108	-11.894	-1.867

3.5 Détermination du nombre d'observations extrêmes des résidus GARCH standardisés

La même procédure faite dans la section précédente est adoptée, sauf le fait qu'ici la VaR que nous cherchons à calculer est la VaR-GPD conditionnelle. À partir de là, nous ne nous intéressons plus à la détermination du nombre d'observations extrêmes dans la série des rendements, mais plutôt dans la série des résidus standardisés obtenus à partir de l'estimation du $ARMA(|5|,|3|)$ -ARCH(4). La figure 3.18 (voir annexe E pour les autres périodes) donne la fonction moyenne des excès ainsi que le graphique de Hill de ces résidus pour chacune des queues. Les tendances négatives puis positives au dessus du seuil $u = 0.421$, pour la queue droite, et positive au dessus du seuil $u = 0.43$, pour la queue gauche, indiquent une large queue dans la distribution des pertes et des gains. Le graphique de Hill pour les deux queues, nous permet de choisir $k = 60$. Le tableau 3.11 (voir annexe E pour les autres périodes) donne la valeur de la VaR-GPD conditionnelle pour différentes valeurs de k et de α . Nous voyons, du tableau, que la valeur de $k = 60$ est dans la région de stabilité de la VaR.

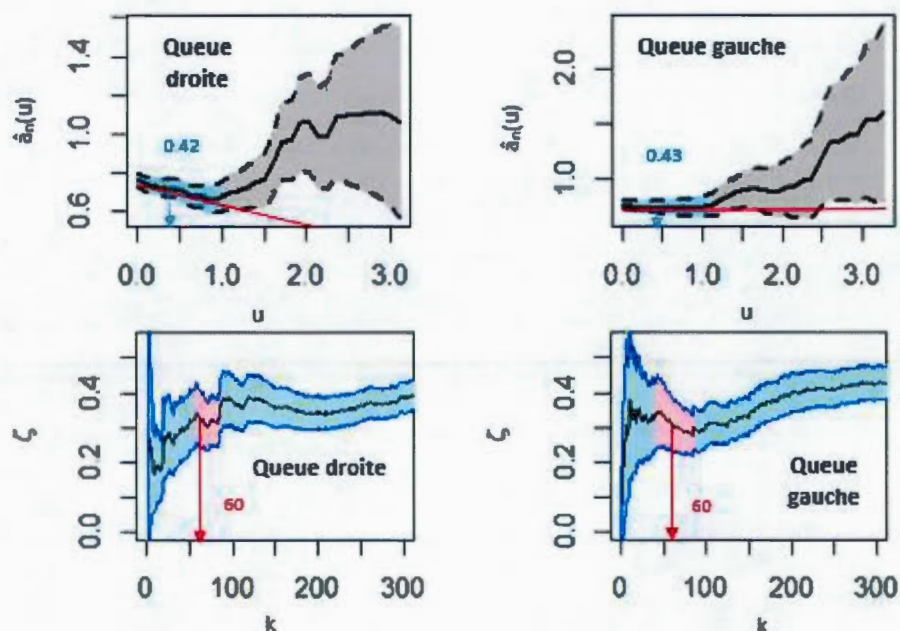


Figure 3.18 : Graphiques des excès et Hill des résidus standardisés - période 1

Tableau 3.11 : Analyse de sensibilité à k de la $\text{VaR}^{\text{GPD}_C}$

k	Queue droite - Période 1			Queue gauche - Période 1		
	u	$\text{VaR}_{99\%}^{\text{GPD}_C}$	$\text{VaR}_{95\%}^{\text{GPD}_C}$	u	$\text{VaR}_{1\%}^{\text{GPD}_C}$	$\text{VaR}_{5\%}^{\text{GPD}_C}$
20	0.945	9.241	5.356	0.935	-9.946	-5.492
30	0.931	9.222	5.366	0.926	-9.807	-5.477
40	0.721	5.843	3.641	0.720	-9.512	-5.578
50	0.567	5.928	3.773	0.562	-9.432	-5.597
60	0.422	8.971	5.551	0.431	-9.283	-5.644
70	0.309	8.998	5.579	0.310	-9.302	-5.645
80	0.195	9.054	5.592	0.206	-9.218	-5.670

À partir de k , le tableau 3.12 (voir annexe E pour les autres périodes) donne une statistique descriptive du résultat de l'estimation des paramètres de la GPD conditionnelle ainsi que la VaR -GPD conditionnelle pour $\alpha = 1\%$ et 5% . Nous remarquons que la somme des paramètres estimés du GARCH est très inférieure à 1, ce qui exclut la persistance des chocs de volatilité.

Tableau 3.12 : Statistiques descriptives des paramètres estimés de la VaR^{GPD_C}

	60	60	60	60
Queue droite - Période 1				
ω	0	0	0	0.004
α_1	0.148	0.237	0	0.999
α_2	0.028	0.037	0	0.192
α_3	0.005	0.007	0	0.034
α_4	0.009	0.016	0	0.121
$\hat{\zeta}$	0.008	0.137	-0.318	0.433
\hat{i}	0.690	0.131	0.296	1.071
$VaR_{99\%}^{GPD_C}$	8.971	10.063	125.147	0.932
$VaR_{95\%}^{GPD_C}$	5.551	5.852	71.335	0.622
Queue gauche - Période 1				
ω	0	0	0	0.005
α_1	0.149	0.230	0	0.999
α_2	0.026	0.036	0	0.192
α_3	0.005	0.007	0	0.031
α_4	0.008	0.016	0	0.101
$\hat{\zeta}$	0.019	0.143	-0.336	0.485
\hat{i}	0.733	0.133	0.292	1.064
$VaR_{1\%}^{GPD_C}$	-9.283	11.593	-235.783	-1.707
$VaR_{5\%}^{GPD_C}$	-5.644	5.842	-118.033	-1.225

3.6 Résultats de la violation de la VaR par les différentes méthodes

La performance relative de chaque modèle de VaR utilisé est évaluée en comparant les ratios de violation actuels (α) et espérés donnés par le tableau 3.13. Les modèles seront classés par ordre de violation. Généralement, pour chaque période, tous les modèles sous-estiment la VaR sauf dans ces cas :

Tableau 3.13 : Ratio de violation de la VaR (en%) - Période 1 à 4

α	5%		1%		0.1%	
Queue	Droite	Gauche	Droite	Gauche	Droite	Gauche
N	8.506 (3)	10.429 (5)	3.022 (5)	4.114 (5)	1.511 (5)	1.622 (5)
H	10.017 (6)	11.761 (7)	3.134 (6)	4.287 (6)	1.847 (7)	2.723 (7)
CF	10.017 (6)	11.472 (6)	2.406 (4)	3.476 (4)	0.616 (2)	1.101 (4)
GPD _{NC}	5.527 (2)	5.781 (2)	1.670 (2)	2.145 (3)	0.691 (3)	0.894 (3)
CN	8.683 (4)	10.233 (4)	3.641 (7)	4.535 (7)	1.737 (6)	1.628 (6)
CS	8.683 (4)	10.233 (4)	3.641 (7)	4.535 (7)	1.737 (6)	1.628 (6)
HF	9.580 (5)	9.942 (3)	1.961 (3)	2.035 (2)	0.224 (1)	0.233 (1)
GPD _C	4.954 (1)	5.527 (1)	1.346 (1)	1.588 (1)	0.795 (4)	0.508 (2)
N	9.077 (4)	11.512 (5)	2.462 (6)	4.467 (7)	0.769 (4)	1.890 (5)
H	11.077 (7)	13.574 (7)	1.846 (3)	3.952 (5)	1.077 (5)	2.062 (6)
CF	7.538 (3)	11.340 (4)	1.385 (1)	2.577 (4)	0.462 (2)	1.031 (3)
GPD _{NC}	4.448 (1)	4.744 (1)	2.142 (5)	1.708 (2)	1.647 (7)	1.328 (4)
CN	9.568 (6)	11.552 (6)	3.395 (7)	4.310 (6)	0.617 (3)	2.586 (7)
CS	9.568 (6)	11.552 (6)	3.395 (7)	4.310 (6)	0.617 (3)	2.586 (7)
HF	9.414 (5)	10.517 (3)	2.006 (4)	2.241 (3)	0.309 (1)	0.345 (1)
GPD _C	5.720 (2)	3.609 (2)	1.476 (2)	1.486 (1)	1.107 (6)	0.637 (2)
N	11.224 (4)	11.943 (5)	3.231 (4)	2.674 (4)	0.680 (4)	0.178(1)
H	11.395 (5)	13.191 (7)	4.932 (7)	4.635 (7)	3.741 (7)	2.496 (6)
CF	12.245 (7)	13.012 (6)	4.082 (6)	3.209 (5)	1.190 (5)	3.565 (7)
GPD _{NC}	6.055 (2)	7.143 (2)	1.835 (2)	1.984 (2)	0.550 (2)	0.595 (4)
CN	11.735 (6)	11.052 (4)	3.401 (5)	4.278 (6)	1.361 (6)	0.713 (5)
CS	11.735 (6)	11.052 (4)	3.401 (5)	4.278 (6)	1.361 (6)	0.713 (5)
HF	9.864 (3)	10.339 (3)	2.041 (3)	2.139 (3)	0.340 (1)	0.357 (3)
GPD _C	4.555 (1)	5.664 (1)	1.242 (1)	1.307 (1)	0.621 (3)	0.218 (2)
N	7.961 (4)	10.893 (4)	1.553 (4)	4.575 (5)	1.553 (6)	4.575 (6)
H	7.767 (3)	12.418 (6)	2.913 (6)	4.793 (7)	2.913 (7)	4.793 (7)
CF	9.903 (7)	11.765 (5)	0.971 (1)	3.050 (4)	0.971 (5)	3.050 (5)
GPD _{NC}	4.487 (1)	4.680 (2)	0.641 (3)	0.985 (1)	0 (2)	0.246 (2)
CN	9.339 (5)	13.319 (7)	3.113 (7)	4.585 (6)	0.778 (4)	1.310 (4)
CS	9.339 (5)	13.319 (7)	3.113 (7)	4.585 (6)	0.778 (4)	1.310 (4)
HF	9.533 (6)	10.699 (3)	1.946 (5)	2.183 (3)	0.195 (1)	0.218 (1)
GPD _C	5.569 (2)	5.042 (1)	1.211 (2)	1.961 (2)	0.242 (3)	0.840 (3)

Le terme entre parenthèses représente le classement du modèle par rapport aux autres

- Pour la 1^{ère} période : une GPD conditionnelle à la queue droite avec $\alpha = 5\%$.

- Pour la 2^{ème} période : une GPD non conditionnelle à la queue droite et gauche avec $\alpha = 5\%$ et d'une GPD conditionnelle à la queue gauche avec $\alpha = 5\%$.
- Pour la 3^{ème} période : une GPD conditionnelle à la queue droite avec $\alpha = 5\%$.
- Pour la 4^{ème} période : une GPD non conditionnelle à la queue droite et gauche avec $\alpha = 5\%$ et 1% , à la queue droite avec $\alpha = 0.1\%$ et une Cornish-Fisher à la queue droite avec $\alpha = 1\%$.

Les performances des méthodes conditionnelles, normale et student, sont similaires. La performance de la Cornish-Fisher et la méthode historique filtrée tend à s'améliorer au fur et à mesure que nous augmentons le quantile, et ceci est valable pour toutes les périodes. Le contraire est enregistré pour les méthodes GPD conditionnelle et non conditionnelle. Ces deux dernières s'approprient les meilleures performances avec un ratio qui est, souvent, le plus proche de la valeur théorique. Elles produisent donc une meilleure mesure de la VaR dans les faibles quantiles. Pour les grands quantiles, elles cèdent la place à la méthode historique filtrée qui devient plus avantageuse.

Les figures 3.19 à 3.26 illustrent, pour la période 1 (voir annexe F pour les autres périodes), ces violations par chaque méthode avec $\alpha = 1\%$.

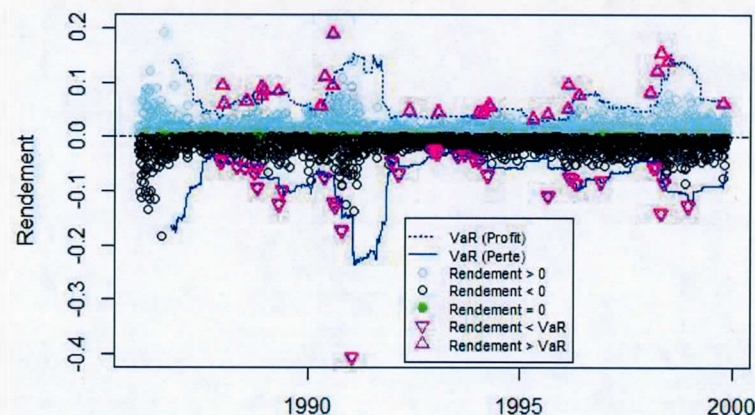


Figure 3.19 : Violation de la VaR par la $VaR^{GPD_{NC}}$

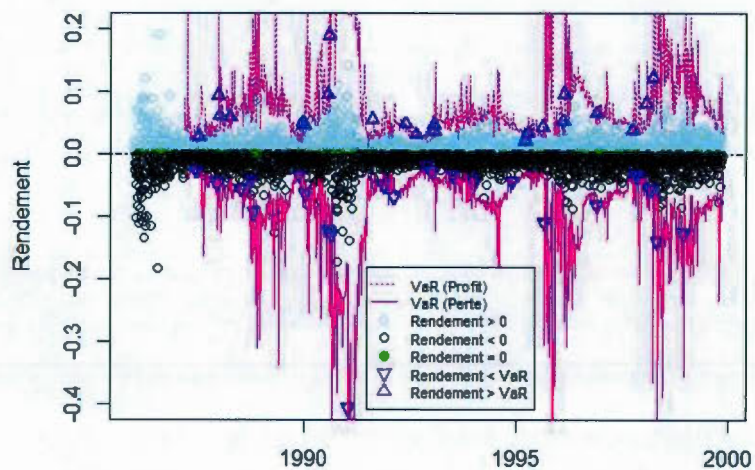


Figure 3.20 : Violation de la VaR par la VaR^{GPD_C}

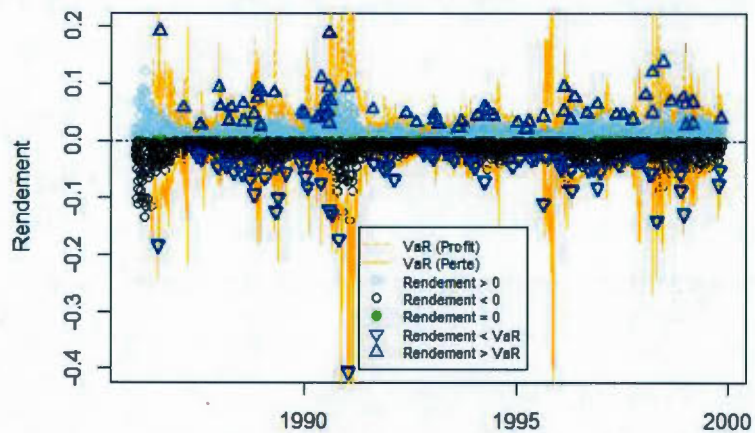


Figure 3.21 : Violation de la VaR par la VaR^{CN}

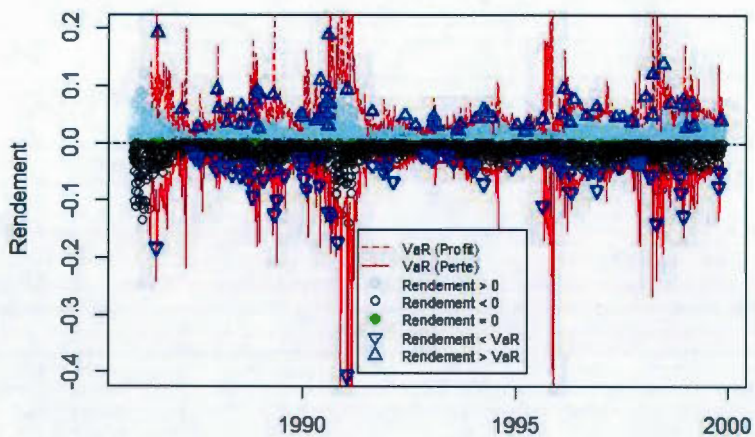


Figure 3.22 : Violation de la VaR par la VaR^{CS_t}

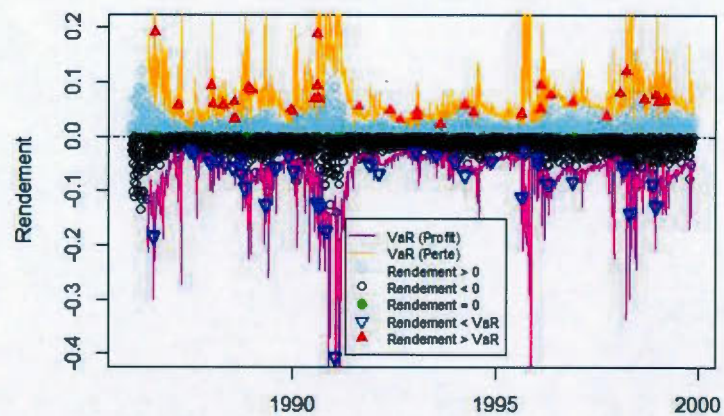


Figure 3.23 : Violation de la VaR par la VaR^{HF}

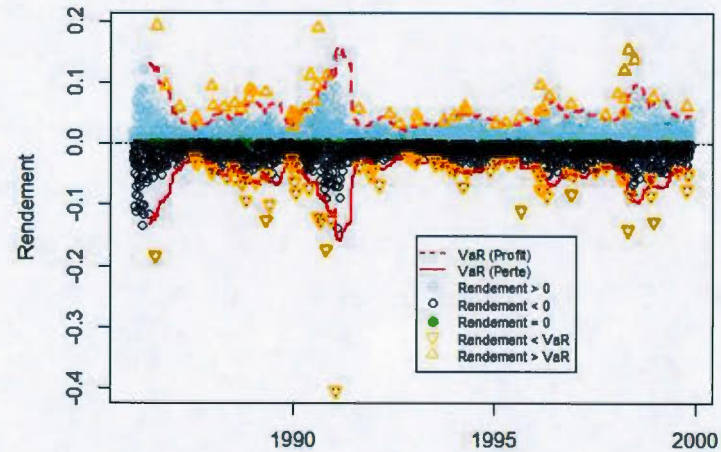


Figure 3.24 : Violation de la VaR par la VaR^N

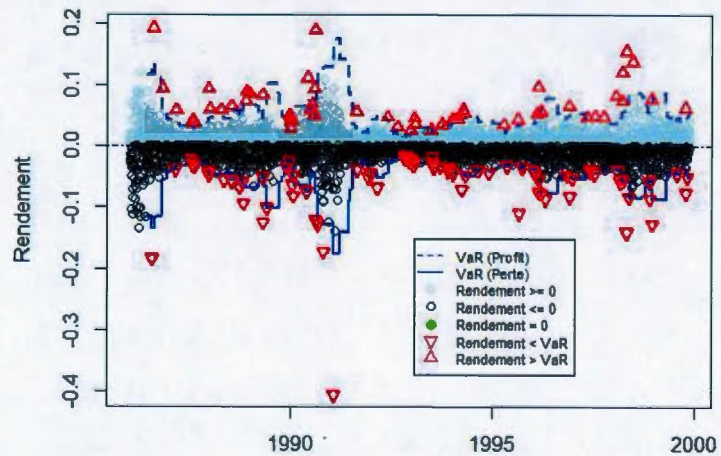


Figure 3.25 : Violation de la VaR par la VaR^H

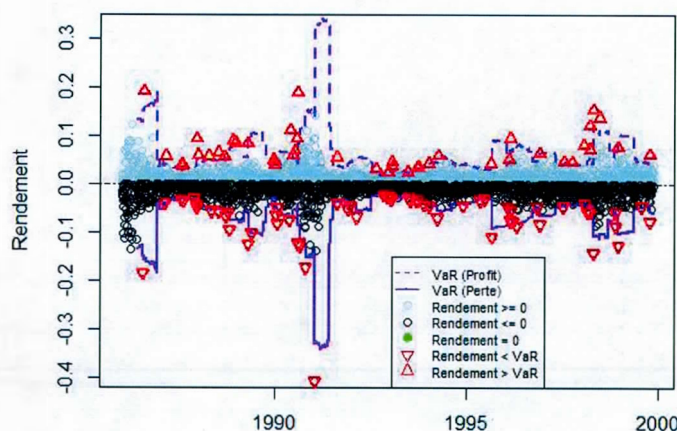


Figure 3.26 : Violation de la VaR par la VaR^{CF}

3.7 Résultats des tests de backtesting

Statistiquement, la comparaison des performances de chaque modèle est analysée à partir des tests de backtesting vus dans le chapitre 2. Les tableaux 3.14 et 3.15 donnent, pour la période 1, les résultats de ces tests pour $\alpha = 5\%$ et 1% (voir annexe G pour les autres périodes). On remarque que le test GMM de durée est complémentaire au test de durée de Kupiec. De plus, on gagne en couverture non conditionnelle et conditionnelle au fur et à mesure qu'on augmente le quantile. Les méthodes basées sur la modélisation GARCH sont les mieux adaptées à l'hypothèse d'indépendance étant donné que la filtration GARCH permet d'obtenir une série iid. Par contre, les autres y sont moins adaptées en particulier la méthode GPD non conditionnelle qui passe seulement les tests de couverture non conditionnelle. Plus on augmente le quantile, plus l'hypothèse d'indépendance est non rejetée et par analogie avec l'examen du ratio de violation, la méthode historique filtrée gagne en performance plus rapidement que les méthodes normale, historique et Cornish-Fisher. Cette dernière donne des bons résultats surtout dans la 2^{ème} et la 4^{ème} période, contrairement à la méthode conditionnelle normale et student.

Tableau 3.14 : Tests de backtesting pour $\alpha = 5\%$ - Période 1

	Queue droite						Queue gauche						χ^2_C		
	CN	HF	GPD _{NC}	GPD _C	N	H	CF	CN	HF	GPD _{NC}	GPD _C	N		H	CF
LR _{CC} ^C	42.198 (0)	62.882 (0)	0.982 (0.322)	0.007 (0.932)	38.562 (0)	74.267 (0)	74.267 (0)	73.131 (0)	69.563 (0)	2.055 (0.152)	0.892 (0.345)	82.705 (0)	122.393 (0)	113.241 (0)	3.841
J _{UC}	29.358 (0)	41.139 (0)	1.053 (0.305)	0.005 (0.941)	27.268 (0)	47.369 (0)	47.369 (0)	48.553 (0)	44.580 (0)	1.891 (0.169)	0.854 (0.355)	51.453 (0)	70.740 (0)	66.450 (0)	3.841
LR _{ind} ^C	0.227 (0.633)	1.549 (0.213)	11.540 (0)	0.956 (0.328)	11.069 (0)	20.398 (0)	18.462 (0)	0.262 (0.608)	0.075 (0.784)	15.284 (0)	0.162 (0.687)	4.063 (0.044)	7.090 (0.008)	6.421 (0.011)	3.841
LR _{ind} ^{CP}	0.059 (0.807)	0.168 (0.682)	9.926 (0.002)	2.610 (0.106)	6.027 (0.014)	8.756 (0.003)	8.722 (0.003)	0.439 (0.508)	0.895 (0.344)	10.020 (0.002)	0.008 (0.931)	0.843 (0.358)	0.006 (0.938)	0.268 (0.260)	3.841
J _{ind} (2)	1.814 (0.404)	5.872 (0.053)	18.252 (0)	3.047 (0.218)	19.365 (0)	34.985 (0)	55.725 (0)	5.648 (0.059)	4.293 (0.117)	23.713 (0)	1.946 (0.378)	17.886 (0)	9.599 (0.008)	23.955 (0)	5.991
J _{ind} (4)	3.741 (0.442)	8.429 (0.077)	24.212 (0)	5.684 (0.224)	29.044 (0)	43.667 (0)	57.493 (0)	7.931 (0.094)	6.624 (0.157)	31.903 (0)	4.156 (0.385)	19.528 (0.001)	9.605 (0.048)	25.190 (0)	9.488
J _{ind} (6)	4.810 (0.568)	11.816 (0.066)	28.536 (0)	9.140 (0.166)	30.405 (0)	49.843 (0)	76.473 (0)	8.870 (0.181)	8.491 (0.204)	33.611 (0)	7.049 (0.316)	20.377 (0.002)	13.913 (0.031)	26.973 (0)	12.592
LR _{CC} ^C	42.426 (0)	64.431 (0)	12.522 (0.002)	0.964 (0.618)	49.630 (0)	94.665 (0)	92.729 (0)	77.394 (0)	69.638 (0)	17.339 (0)	1.054 (0.590)	86.768 (0)	129.483 (0)	119.662 (0)	5.991
DB	25.210 (0)	25.736 (0)	15.098 (0)	33.220 (0)	15.507 (0)	24.935 (0)	33.056 (0)	43.012 (0)	43.469 (0)	27.807 (0)	38.360 (0)	21.596 (0)	24.434 (0)	33.613 (0)	5.991
J _{CC} (2)	29.359 (0)	55.384 (0)	13.896 (0)	3.172 (0.205)	40.783 (0)	71.737 (0)	75.483 (0)	66.159 (0)	59.836 (0)	16.369 (0)	2.359 (0.307)	74.031 (0)	100.826 (0)	97.685 (0)	5.991
J _{CC} (4)	42.316 (0)	66.794 (0)	23.211 (0)	5.744 (0.219)	61.297 (0)	104.707 (0)	107.593 (0)	77.255 (0)	68.794 (0)	28.699 (0)	4.734 (0.316)	95.029 (0)	123.696 (0)	127.928 (0)	9.488
J _{CC} (6)	44.598 (0)	71.950 (0)	26.220 (0)	9.317 (0.157)	72.112 (0)	125.384 (0)	120.845 (0)	78.768 (0)	69.716 (0)	29.069 (0)	6.072 (0.415)	101.954 (0)	130.861 (0)	139.763 (0)	12.592

Le terme entre parenthèses représente le p-value

Tableau 3.15 : Tests de backtesting pour $\alpha = 1\%$ - Période 1

	Queue droite						Queue gauche						χ^2_C		
	CN	HF	GPD _{NC}	GPD _C	N	H	CF	CN	HF	GPD _{NC}	GPD _C	N		H	CF
LR _{UC} ^C	74.979 (0)	13.001 (0)	6.547 (0.011)	1.780 (0.182)	47.916 (0)	52.497 (0)	25.613 (0)	116.438 (0)	14.317 (0)	16.743 (0)	4.669 (0.030)	95.057 (0)	103.865 (0)	60.112 (0)	3.841
J _{UC}	34.577 (0)	9.486 (0.002)	4.817 (0.028)	2.793 (0.094)	24.594 (0)	26.404 (0)	14.989 (0)	47.903 (0)	10.222 (0.001)	11.494 (0)	4.253 (0.039)	41.117 (0)	43.976 (0)	30.911 (0)	3.841
LR _{ind} ^C	0.065 (0.799)	1.401 (0.236)	0.985 (0.321)	0.601 (0.438)	7.645 (0.006)	4.379 (0.036)	0.750 (0.387)	0.063 (0.801)	1.455 (0.228)	3.974 (0.046)	0.808 (0.369)	4.583 (0.032)	3.850 (0.049)	1.509 (0.219)	3.841
LR _{ind} ^{CP}	0.311 (0.577)	0.016 (0.900)	3.716 (0.054)	2.175 (0.140)	2.115 (0.146)	2.787 (0.095)	0.812 (0.367)	0.025 (0.875)	1.024 (0.312)	3.022 (0.082)	3.304 (0.070)	0.302 (0.583)	0.334 (0.564)	0.014 (0.906)	3.841
J _{ind} (2)	0.006 (0.997)	0.314 (0.855)	0.829 (0.661)	0.566 (0.753)	0.021 (0.990)	0.689 (0.709)	0.160 (0.923)	0.375 (0.829)	0.511 (0.774)	1.089 (0.580)	1.286 (0.526)	0.144 (0.931)	0.009 (0.996)	0.189 (0.910)	5.991
J _{ind} (4)	3.839 (0.428)	0.730 (0.948)	7.276 (0.122)	1.516 (0.824)	4.533 (0.339)	5.465 (0.243)	2.122 (0.713)	2.212 (0.697)	0.637 (0.959)	6.204 (0.184)	2.386 (0.665)	3.512 (0.476)	6.082 (0.193)	2.273 (0.686)	9.488
J _{ind} (6)	6.650 (0.354)	1.931 (0.926)	8.889 (0.180)	1.683 (0.946)	7.779 (0.281)	6.648 (0.355)	2.398 (0.880)	3.831 (0.700)	0.687 (0.995)	6.628 (0.357)	2.886 (0.823)	3.857 (0.696)	8.915 (0.178)	4.063 (0.668)	12.592
LR _{CC} ^C	75.044 (0)	14.402 (0)	7.532 (0.023)	2.380 (0.304)	55.561 (0)	56.876 (0)	26.363 (0)	116.501 (0)	15.772 (0)	20.718 (0)	5.476 (0.065)	99.640 (0)	107.715 (0)	66.621 (0)	5.991
DB	14.986 (0)	11.745 (0.003)	7.065 (0.029)	22.226 (0)	10.409 (0.005)	13.216 (0.001)	9.761 (0.008)	22.916 (0)	6.181 (0.045)	11.328 (0.003)	13.378 (0.001)	9.464 (0.009)	18.364 (0)	15.799 (0)	5.991
J _{CC} (2)	52.919 (0)	11.682 (0.003)	6.302 (0.043)	3.408 (0.182)	35.891 (0)	39.442 (0)	20.526 (0)	77.635 (0)	12.700 (0.002)	15.991 (0)	4.426 (0.109)	65.141 (0)	70.160 (0)	46.559 (0)	5.991
J _{CC} (4)	68.213 (0)	12.233 (0.016)	9.346 (0.053)	4.243 (0.374)	44.227 (0)	50.637 (0)	24.191 (0)	108.477 (0)	13.164 (0.011)	20.460 (0)	4.976 (0.290)	88.205 (0)	95.628 (0)	58.419 (0)	9.488
J _{CC} (6)	73.486 (0)	12.591 (0.054)	13.506 (0.036)	4.828 (0.566)	47.394 (0)	55.775 (0)	25.818 (0)	121.950 (0)	13.176 (0.040)	24.005 (0)	5.457 (0.487)	97.589 (0)	106.026 (0)	61.757 (0)	12.592

Le terme entre parenthèse représente le p-value

Généralement, le modèle le moins rejeté par les tests est le modèle GPD conditionnelle. Ce résultat était prévu du moment où cette méthode prend aussi bien en compte la volatilité que les valeurs extrêmes.

De plus, on voit clairement que l'étude des tests de violation dépend des périodes. Il serait, donc, biaisé de se limiter aux résultats des tests de la série entière, comme dans l'article de [Trabelsi, Raggad et Marimoutou, 2009](#), plutôt que ceux des sous-régimes.

CONCLUSION

Au cours de ce mémoire, les tests de changement de régime ont permis de diviser la série entière en sous-séries de régimes différents avec pour chacun la spécification ARMA-GARCH la plus adaptée. Ceci a permis de modéliser les différentes techniques de VaR conditionnelles pour chacune de ces sous-périodes et de le comparer aux techniques de VaR non conditionnelles. Nous avons ainsi montré qu'en combinant, sur chaque période, un modèle d'étude de la volatilité avec la théorie des valeurs extrêmes, nous aboutissons à une meilleure mesure de la VaR conditionnelle dont les résultats dépassent positivement ceux de la méthode historique filtrée. Une telle mesure réagit en mieux aux changements dans les dynamiques de la volatilité et comptabilise toute l'information présente dans les queues de la distribution des rendements surtout si l'hypothèse de normalité est rejetée, corrigeant ainsi les faiblesses des techniques de VaR traditionnelles.

Le choix d'une simulation par roulement a permis d'ajouter plus de précision en capturant la variation dynamique dans les caractéristiques de la série, dans des périodes de temps plus petites à même intervalle et de prévision journalière.

Nous avons également mis en évidence l'utilité des tests de backtesting pour déterminer l'aptitude et la limite de chaque test à détecter les violations existantes, et aussi pour réaliser la complémentarité existante entre ces tests.

L'étude pourra être extrapolée à l'estimation du point terminal, ou en d'autres termes, l'ultime perte ou profit qui pourrait être réalisé.

De plus, au lieu de la technique de roulement pour prévoir la VaR, on pourra utiliser une simulation Monte Carlo d'un modèle stochastique avec mouvement Brownien.

Nous pourrions aussi faire appel à la fonction de perte pour renforcer nos tests de backtesting, en nous focalisant ainsi sur la magnitude de la violation plutôt que sur le nombre de violations.

Et enfin, comme autres avenues de recherches, nous suggérons d'étudier les relations de dépendance avec d'autres composantes du marché, à partir de la théorie des copules.

ANNEXE A

IDENTIFICATION DE L'ORDRE ARMA

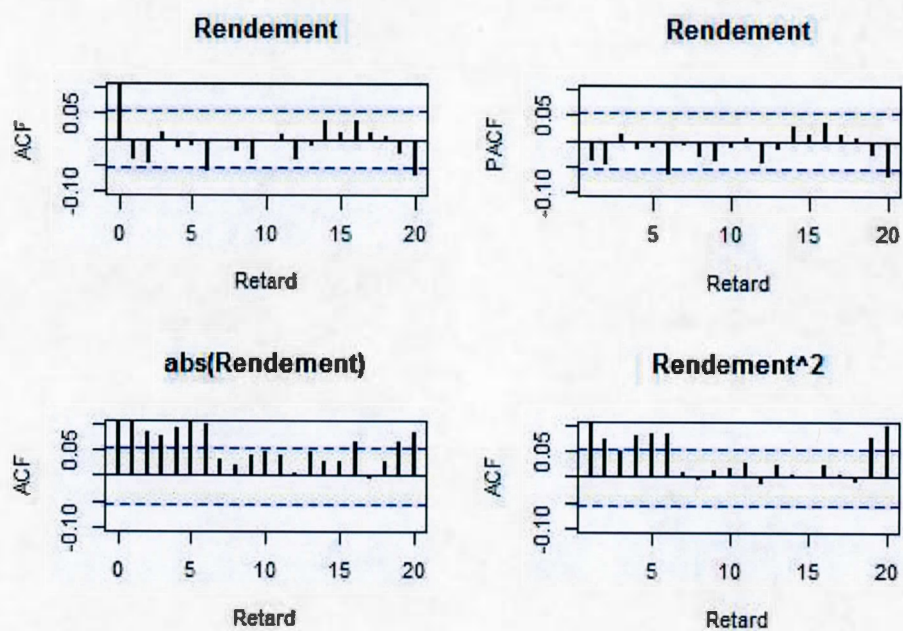


Figure A.1 : Analyse des corrélogrammes de la série des rendements - période 2

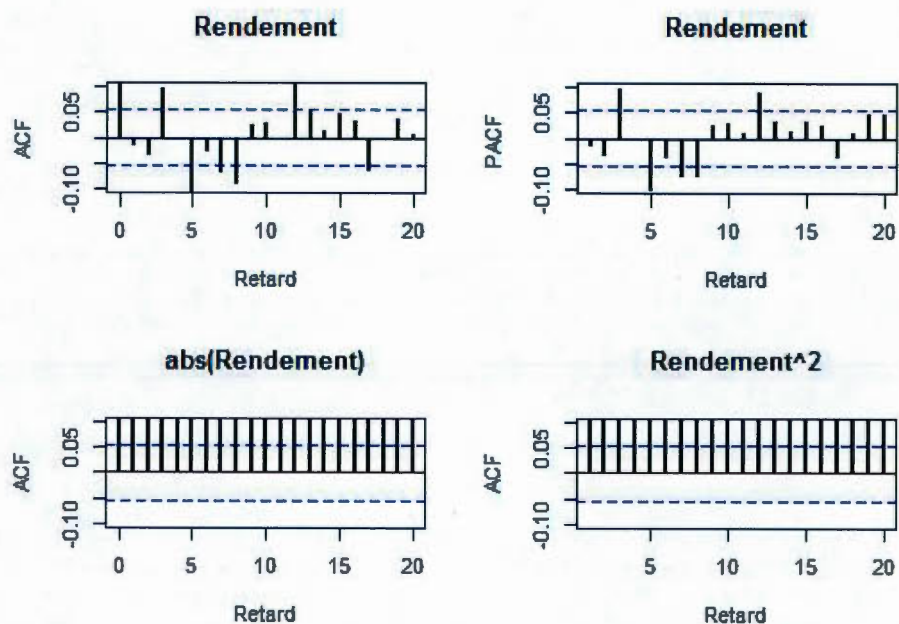


Figure A.2 : Analyse des corrélogrames de la série des rendements - période 3

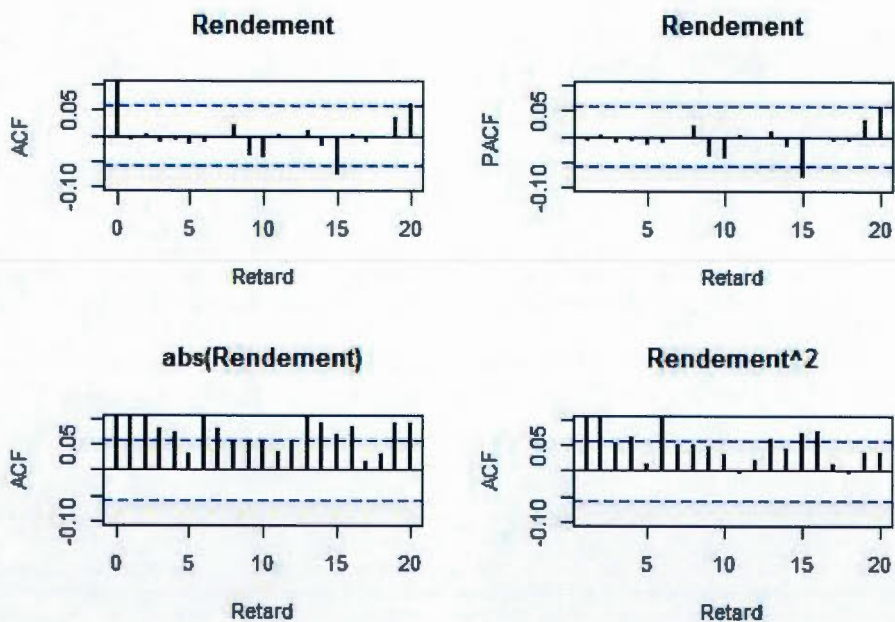


Figure A.3 : Analyse des corrélogrames de la série des rendements - période 4

ANNEXE B

VALIDATION DU ARMA ET PRÉVISION

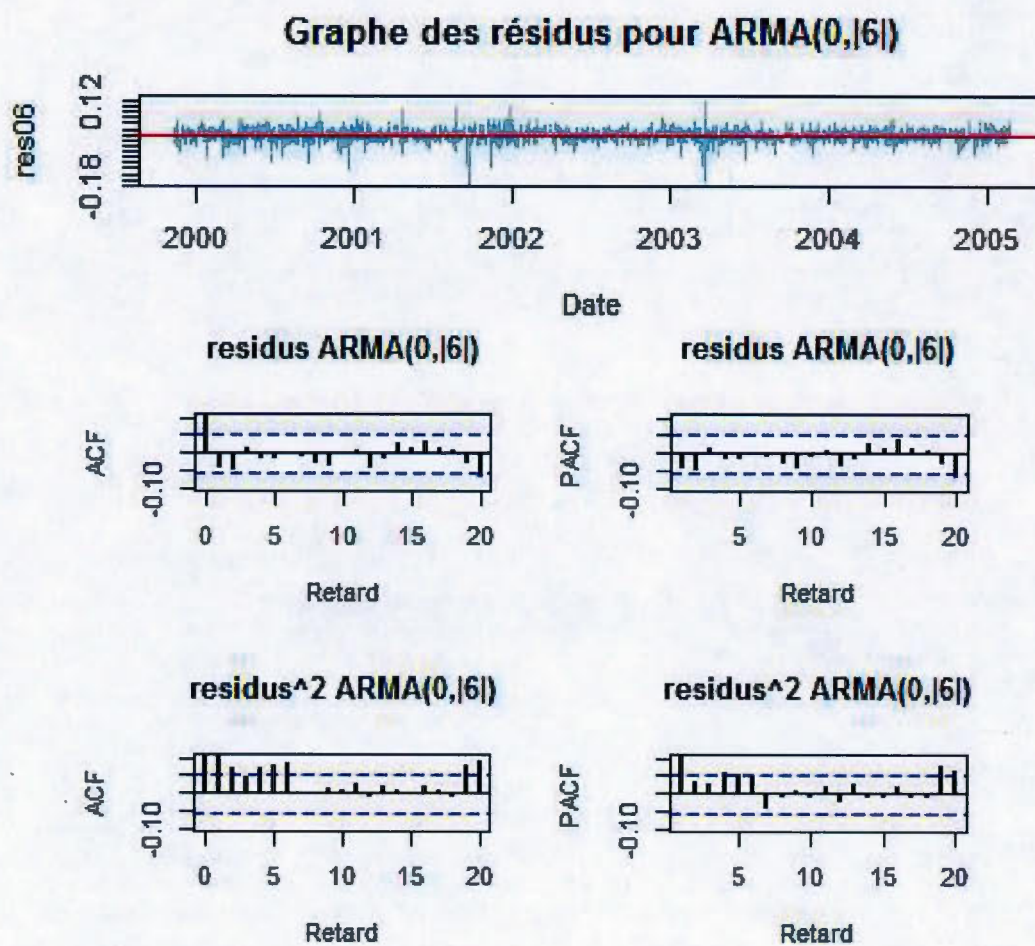


Figure B.1 : Corrélogrammes des résidus du ARMA(0,|6|) - période 2

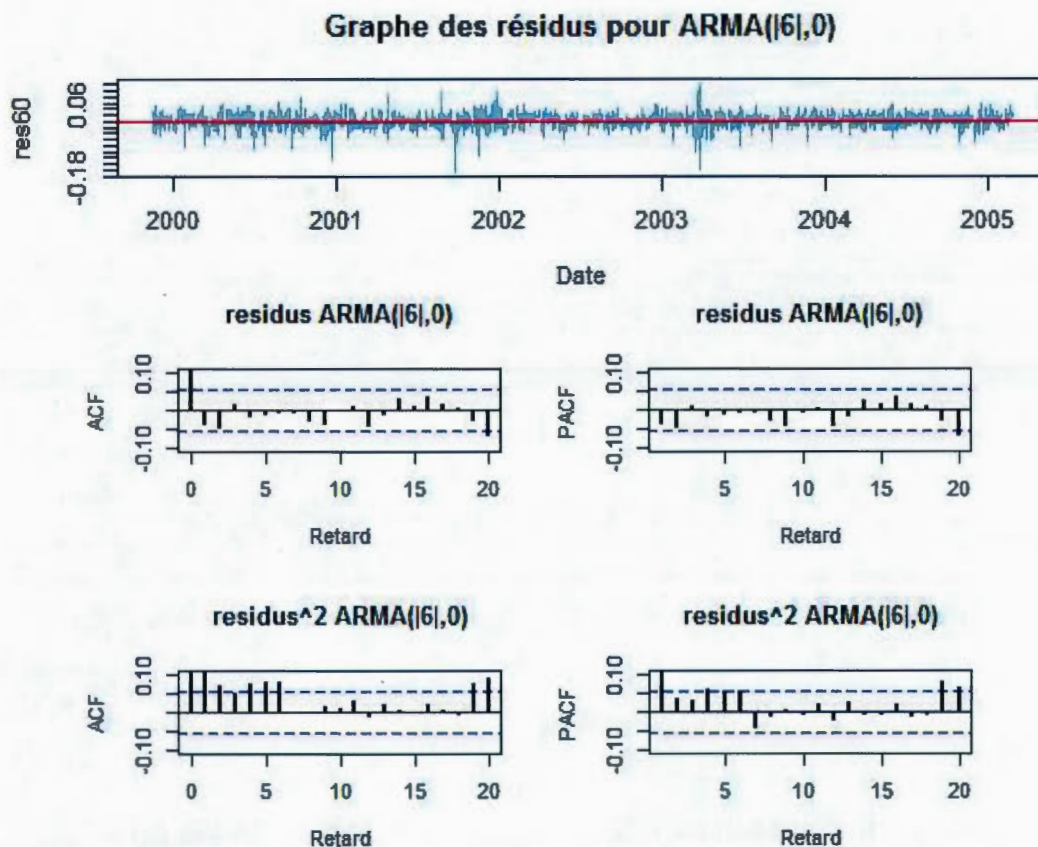


Figure B.2 : Corréllogrames des résidus du ARMA(|6|,0) - période 2

Tableau B.1 : Tests d'autocorrélation globale des résidus - période 2

	ARMA(0, 6) _{L=20}	ARMA(6 ,0) _{L=20}
Box-Pierce	18.127(0.579)	18.527(0.553)
Ljung-Box	18.323(0.566)	18.727(0.54)

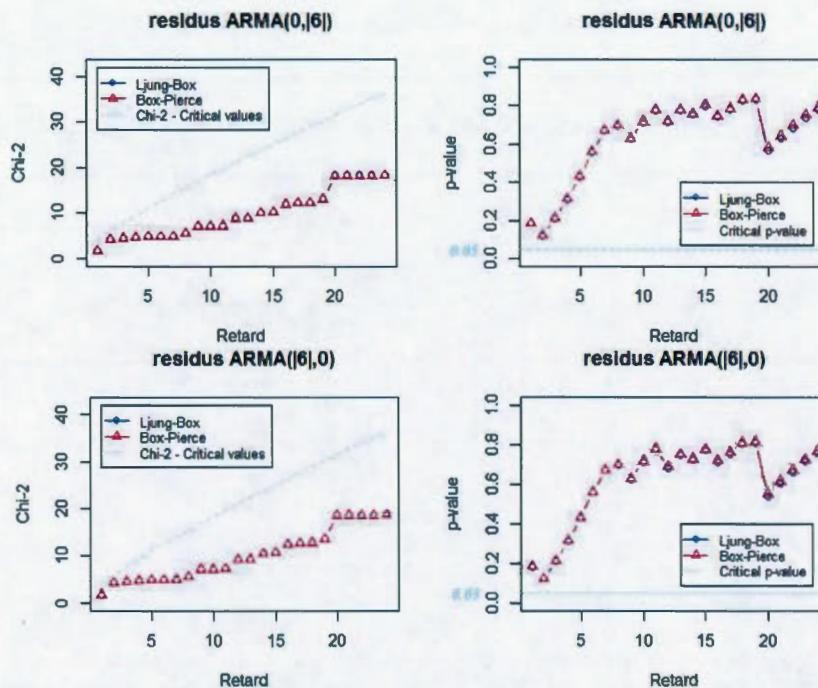
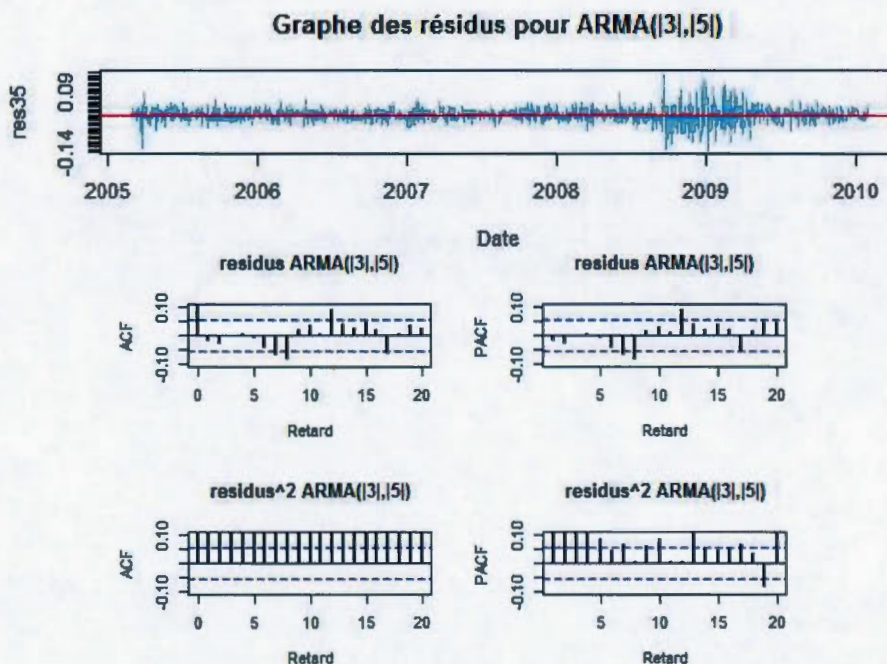


Figure B.3 : Tests d'autocorrélation des résidus - période 2

Figure B.4 : Corrélogrammes des résidus du $\text{ARMA}(|3|,|5|)$ - période 3

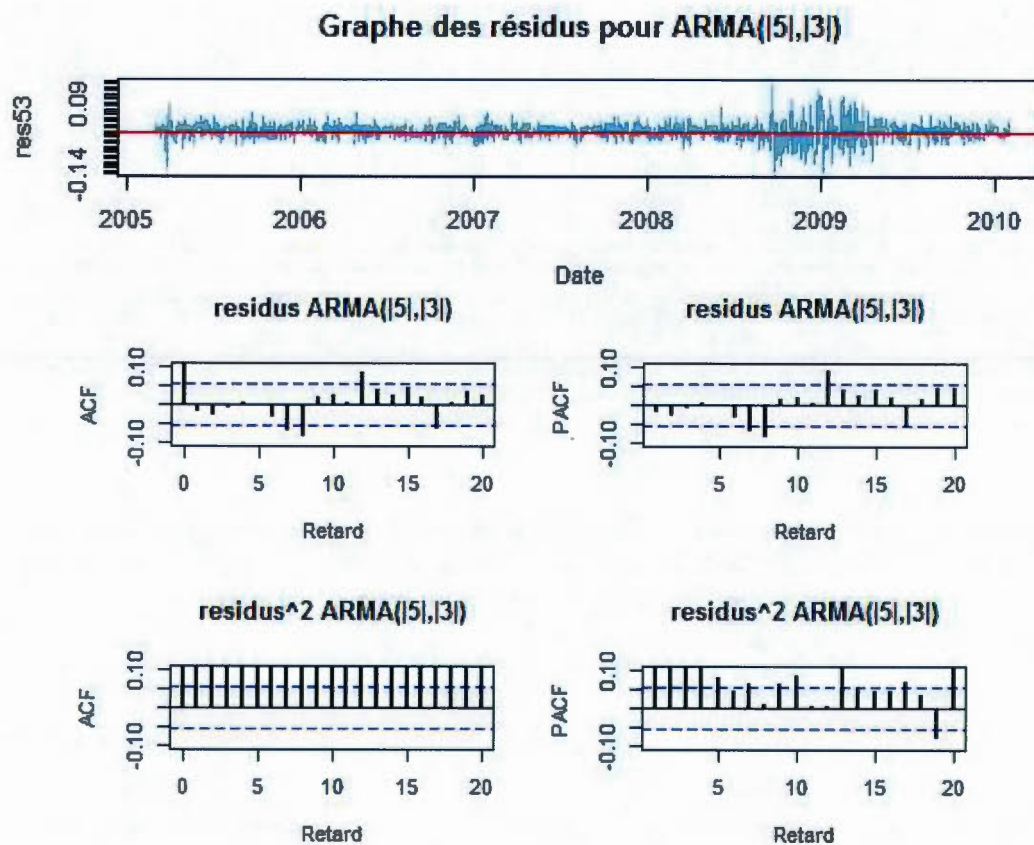


Figure B.5 : Corrélogrammes des résidus du ARMA(|5|,|3|) - période 3

Tableau B.2 : Tests d'autocorrélation globale des résidus - période 3

	ARMA(3 , 5) _{L=11}	ARMA(5 , 3) _{L=11}
Box-Pierce	17.162(0.103)	15.799(0.149)
Ljung-Box	17.292(0.099)	15.918(0.144)

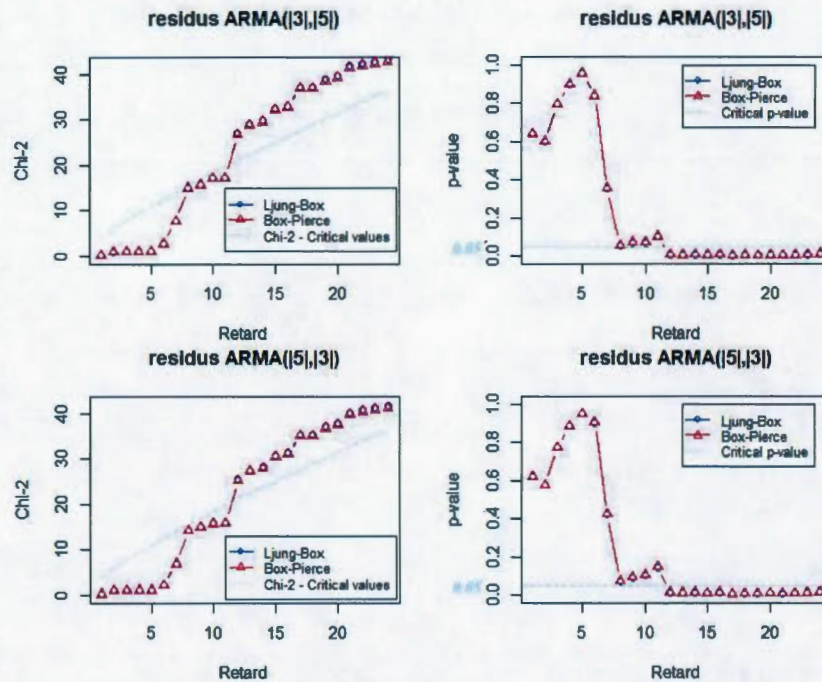


Figure B.6 : Tests d'autocorrélation des résidus - période 3

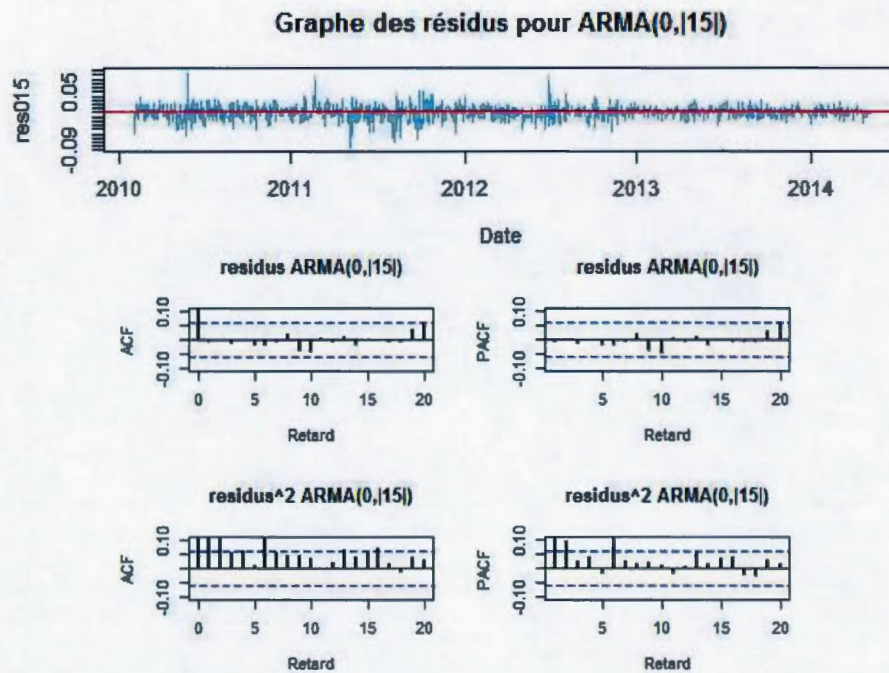


Figure B.7 : Corrélogrammes des résidus du ARMA(0,15) - période 4

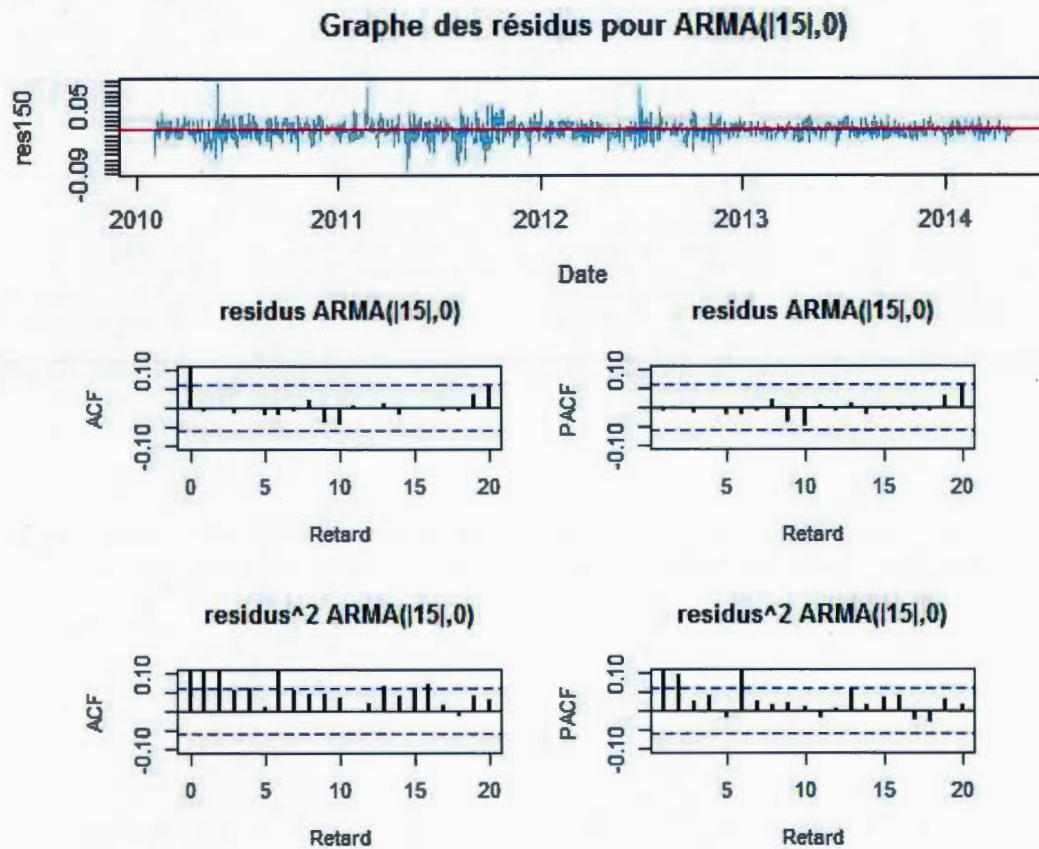


Figure B.8 : Corréllogrammes des résidus du ARMA(|15|,0) - période 4

Tableau B.3 : Tests d'autocorrélation globale des résidus - période 4

	ARMA(0, 15) _{L=20}	ARMA(15 ,0) _{L=20}
Box-Pierce	9.888(0.97)	10.001(0.968)
Ljung-Box	10.047(0.967)	10.162(0.965)

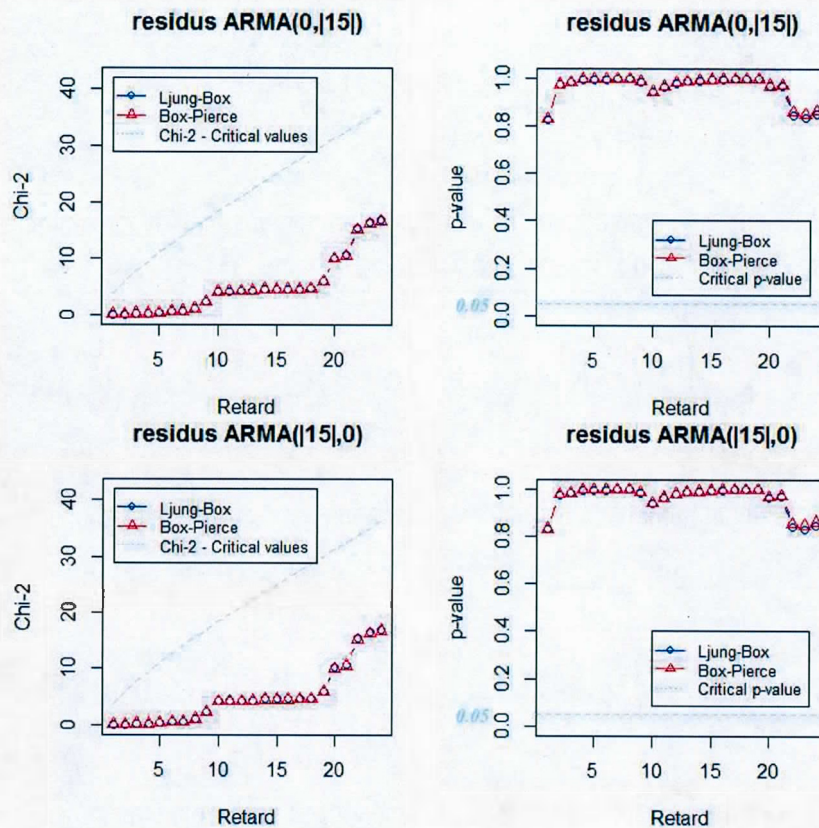


Figure B.9 : Autocorrélation des résidus - période 4

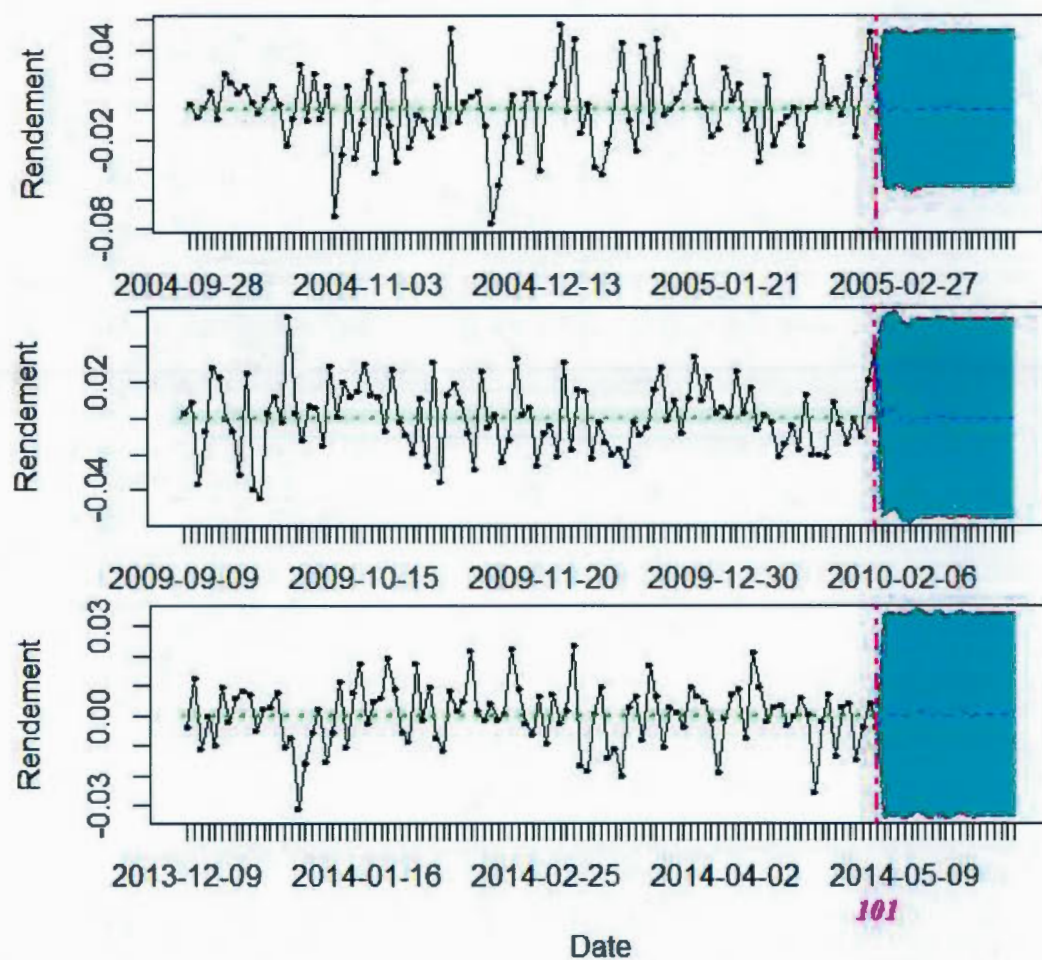


Figure B.10 : Valeurs actuelles et prédites du rendement - période 2 à 4

ANNEXE C

MODÉLISATION DE LA VOLATILITÉ

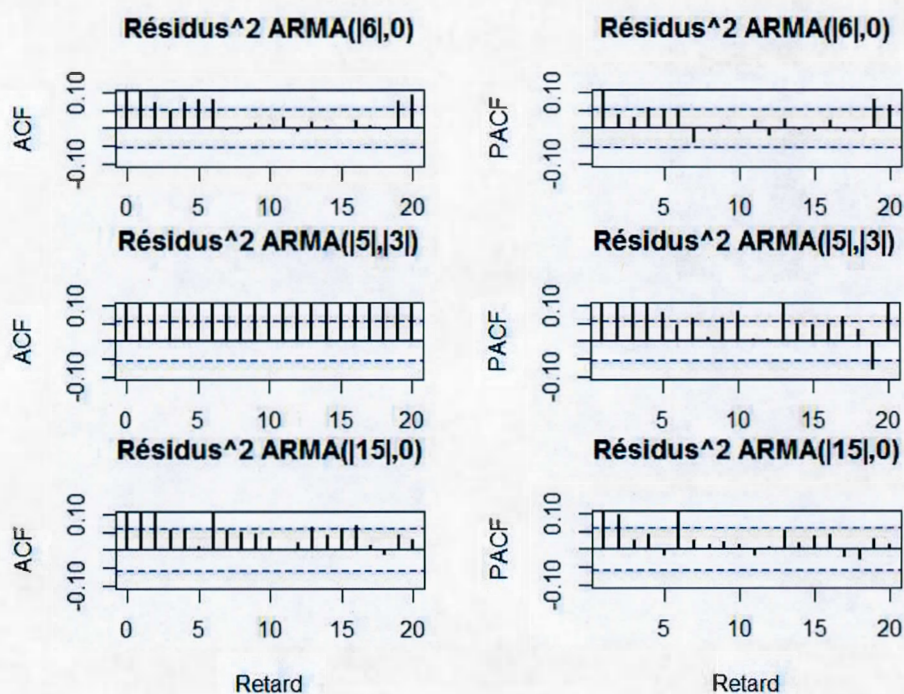


Figure C.1 : Corréllogrammes des résidus au carré - période 2 à 4

Tableau C.1 : Résultats de l'estimation ARMA-ARCH - période 2 à 4

Période 2	Coefficients	SE	t-stat	p-value
ϕ_6	-0.0581*	0.0276	-2.1036	0.0354
ω	0.0005*	0	13.9573	0
α_1	0.1486*	0.0327	4.5382	0
α_2	0.0243*	0.0100	2.4270	0.0152
Période 3	Coefficients	SE	t-stat	p-value
ϕ_5	-0.0948*	0.0284	-3.3411	0.0008
θ_3	0.0929*	0.0293	3.1719	0.0015
ω	0.0001*	0	6.7023	0
α_1	0.1378*	0.0392	3.5163	0.0004
α_2	0.0395*	0.0090	4.3686	0
α_3	0.0033*	0.0011	3.0822	0.0021
α_4	0.0063*	0.0055	1.1389	0.0254
α_5	0.2257*	0.0441	5.1233	0
α_6	0.0979*	0.0382	2.5672	0.0103
Période 4	Coefficients	SE	t-stat	p-value
ϕ_{15}	-0.0745*	0.0307	-2.4292	0.0151
ω	0.0001*	0	7.4305	0
α_1	0.1996*	0.0445	4.4837	0
α_2	0.0360*	0.0101	3.5646	0.0003
α_3	0.0037*	0.0015	2.4689	0.0135

* Les coefficients sont significatifs au niveau de confiance 5%.

Tableau C.2 : Diagnostic du ARMA-ARCH - période 2 à 4

Période 2	Jarque-Bera	Ljung-Box _{L=1}	LM
Résidus standardisés	896.223(0*)	0.522(0.470*)	0.017(0.895*)
Période 3	Jarque-Bera	Ljung-Box _{L=1}	LM
Résidus standardisés	926.070(0*)	0.622(0.430*)	0.978(0.323*)
Période 4	Jarque-Bera	Ljung-Box _{L=1}	LM
Résidus standardisés	502.270(0*)	0.009(0.926*)	0.115(0.734*)

* Les chiffres entre parenthèses représentent les p-value.

ANNEXE D

DÉTERMINATION DU NOMBRE D'OBSERVATIONS EXTRÊMES DE LA SÉRIE DES RENDEMENTS

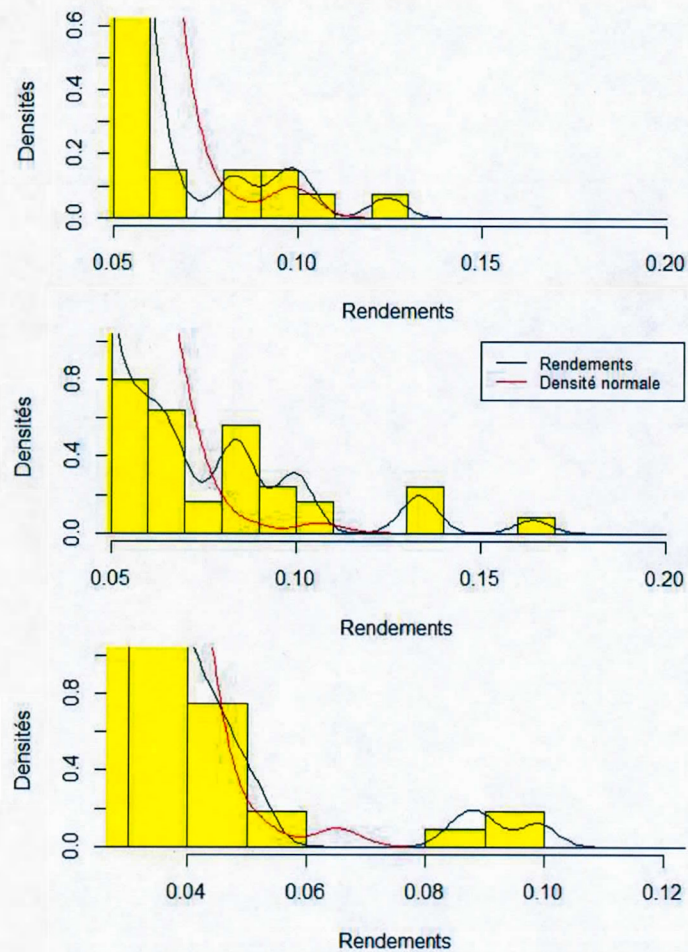


Figure D.1 : Normalité des rendements sur la queue droite - Période 2 à 4

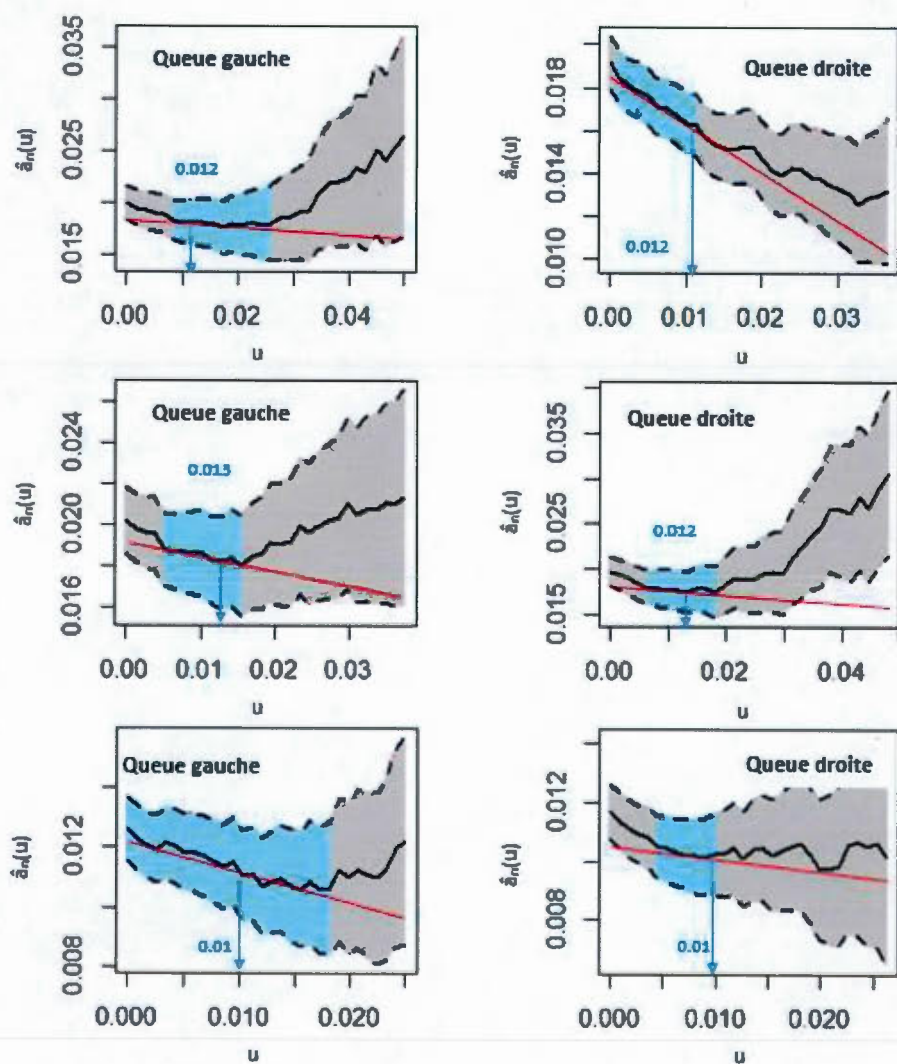


Figure D.2 : Fonction moyenne des excès des rendements - Période 2 à 4

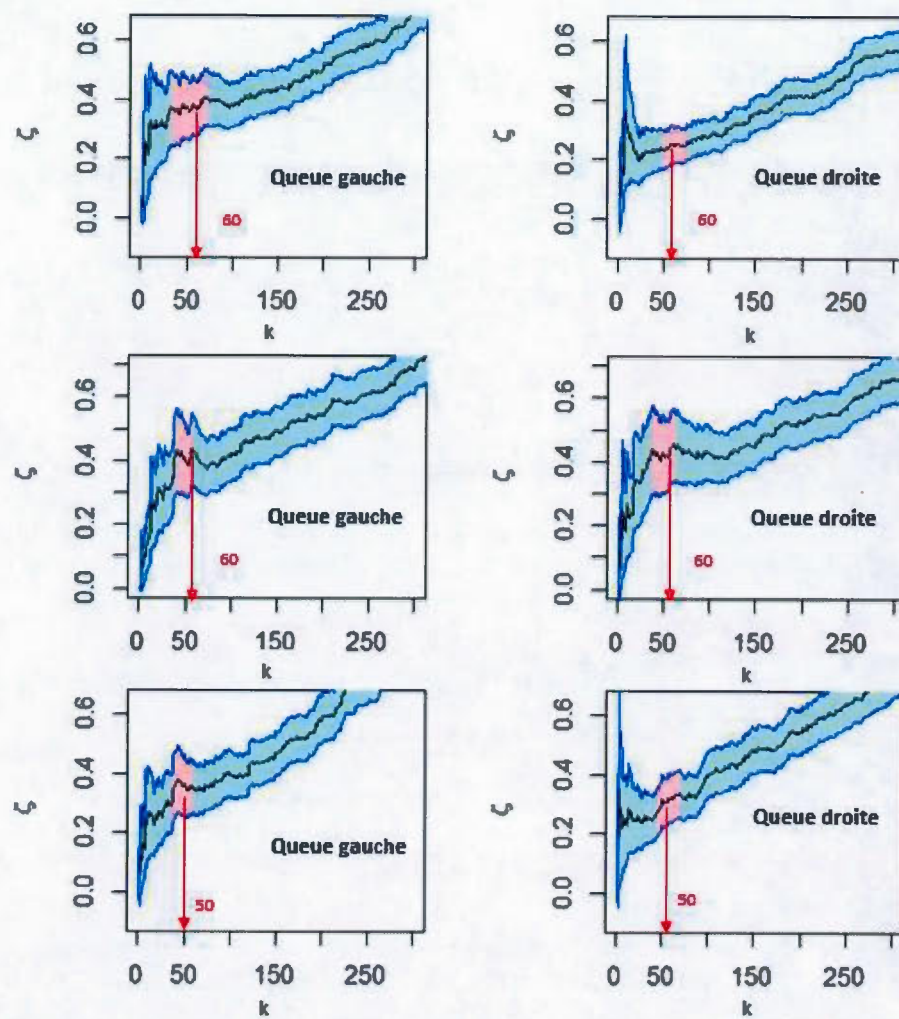


Figure D.3 : Graphique de Hill des rendements - Période 2 à 4

Tableau D.1 : Analyse de sensibilité à k de la $VaR^{GPD_{NC}}$ - Période 2 à 4

k	Queue droite			Queue gauche		
	u	$VaR_{99\%}^{GPD_{NC}}$	$VaR_{95\%}^{GPD_{NC}}$	u	$VaR_{1\%}^{GPD_{NC}}$	$VaR_{5\%}^{GPD_{NC}}$
20	0.030	6.933	4.790	0.030	-9.207	-5.456
30	0.023	6.880	4.860	0.023	-9.180	-5.487
40	0.019	6.860	4.885	0.019	-9.102	-5.553
50	0.015	6.842	4.932	0.015	-9.021	-5.613
60	0.011	6.840	4.941	0.011	-8.978	-5.659
70	0.008	6.844	4.973	0.008	-8.898	-5.716
80	0.005	6.849	5.012	0.005	-8.804	-5.778
20	0.030	7.372	5.253	0.030	-7.080	-5.517
30	0.027	7.516	5.348	0.026	-6.960	-5.404
40	0.019	7.468	5.292	0.021	-6.962	-5.358
50	0.016	7.490	5.281	0.016	-6.957	-5.351
60	0.012	7.527	5.297	0.013	-6.968	-5.335
70	0.009	7.485	5.315	0.009	-6.959	-5.325
80	0.006	7.413	5.357	0.006	-6.978	-5.325
20	0.018	4.879	3.229	0.018	-5.132	-3.624
30	0.015	4.992	3.202	0.015	-5.246	-3.551
40	0.012	4.971	3.220	0.013	-5.084	-3.594
50	0.010	4.955	3.232	0.010	-5.085	-3.611
60	0.007	4.898	3.270	0.007	-5.043	-3.644
70	0.005	4.805	3.295	0.005	-5.068	-3.624
80	0.003	4.813	3.322	0.003	-5.025	-3.642

Tableau D.2 : Statistiques descriptives des paramètres estimés de la VaR^{GPDNC} -
Période 2 à 4

	60	60	60	60
Queue droite - Période 2				
$\hat{\zeta}$	-0.169	0.161	-0.570	0.119
$\hat{\lambda}$	0.018	0.002	0.012	0.023
$VaR_{99\%}^{GPDNC}$	6.839	1.451	4.037	9.132
$VaR_{95\%}^{GPDNC}$	4.940	0.681	3.518	6.325
Queue gauche - Période 2				
$\hat{\zeta}$	0.026	0.148	-0.409	0.284
$\hat{\lambda}$	0.018	0.003	0.012	0.028
$VaR_{1\%}^{GPDNC}$	-8.977	2.179	-12.168	-5.076
$VaR_{5\%}^{GPDNC}$	-5.659	0.976	-7.207	-3.932
Période 3	Moyenne	Écart-type	Min	Max
k	60	60	60	60
Queue droite - Période 3				
$\hat{\zeta}$	-0.134	0.150	-0.554	0.233
$\hat{\lambda}$	0.019	0.008	0.009	0.045
$VaR_{99\%}^{GPDNC}$	7.526	3.915	3.987	16.371
$VaR_{95\%}^{GPDNC}$	5.297	2.446	3.233	10.816
Queue gauche - Période 3				
$\hat{\zeta}$	-0.259	0.134	-0.497	0.124
$\hat{\lambda}$	0.022	0.012	0.011	0.053
$VaR_{1\%}^{GPDNC}$	-6.968	3.254	-12.920	-4.119
$VaR_{5\%}^{GPDNC}$	-5.335	2.438	-10.353	-3.177
Période 4	Moyenne	Écart-type	Min	Max
k	50	50	50	50
Queue droite - Période 4				
$\hat{\zeta}$	-0.021	0.249	-0.489	0.474
$\hat{\lambda}$	0.010	0.003	0.005	0.019
$VaR_{99\%}^{GPDNC}$	4.955	1.297	2.813	7.032
$VaR_{95\%}^{GPDNC}$	3.232	0.683	2.145	4.554
Queue gauche - Période 4				
$\hat{\zeta}$	-0.150	0.154	-0.584	0.163
$\hat{\lambda}$	0.013	0.003	0.007	0.022
$VaR_{1\%}^{GPDNC}$	-5.085	1.546	-7.974	-2.707
$VaR_{5\%}^{GPDNC}$	-3.611	0.841	-5.113	-2.135

ANNEXE E

DÉTERMINATION DU NOMBRE D'OBSERVATIONS EXTRÊMES DES RÉSIDUS STANDARDISÉS

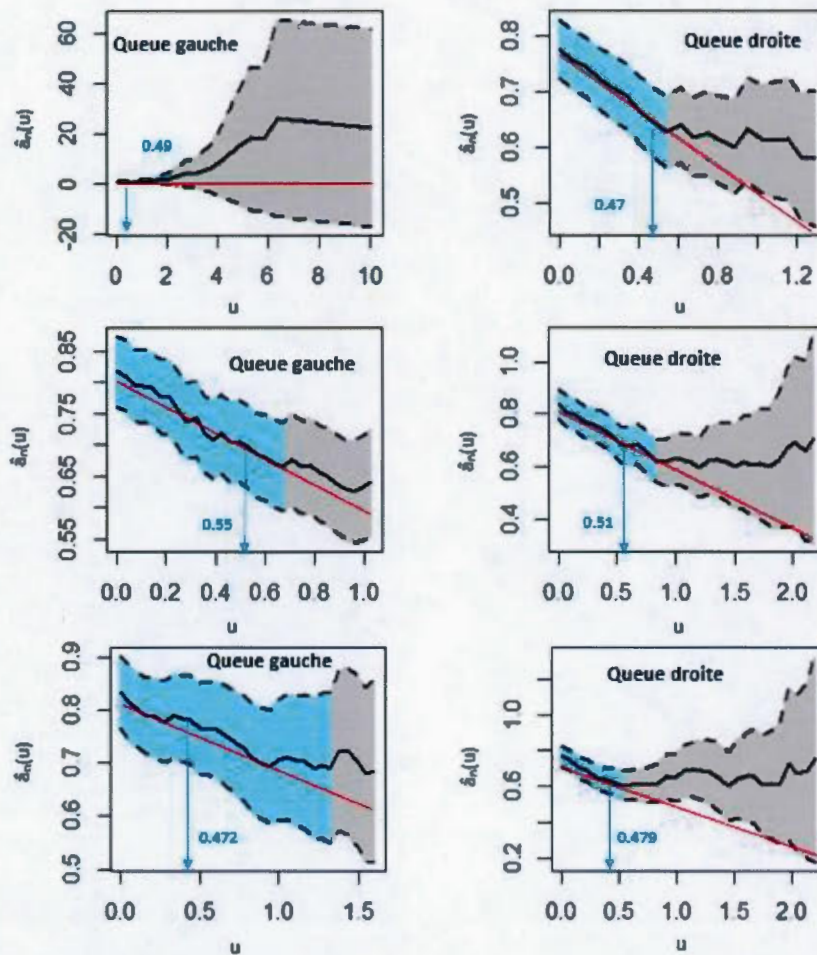


Figure E.1 : Fonction moyenne des excès des résidus standardisés - Période 2 à 4

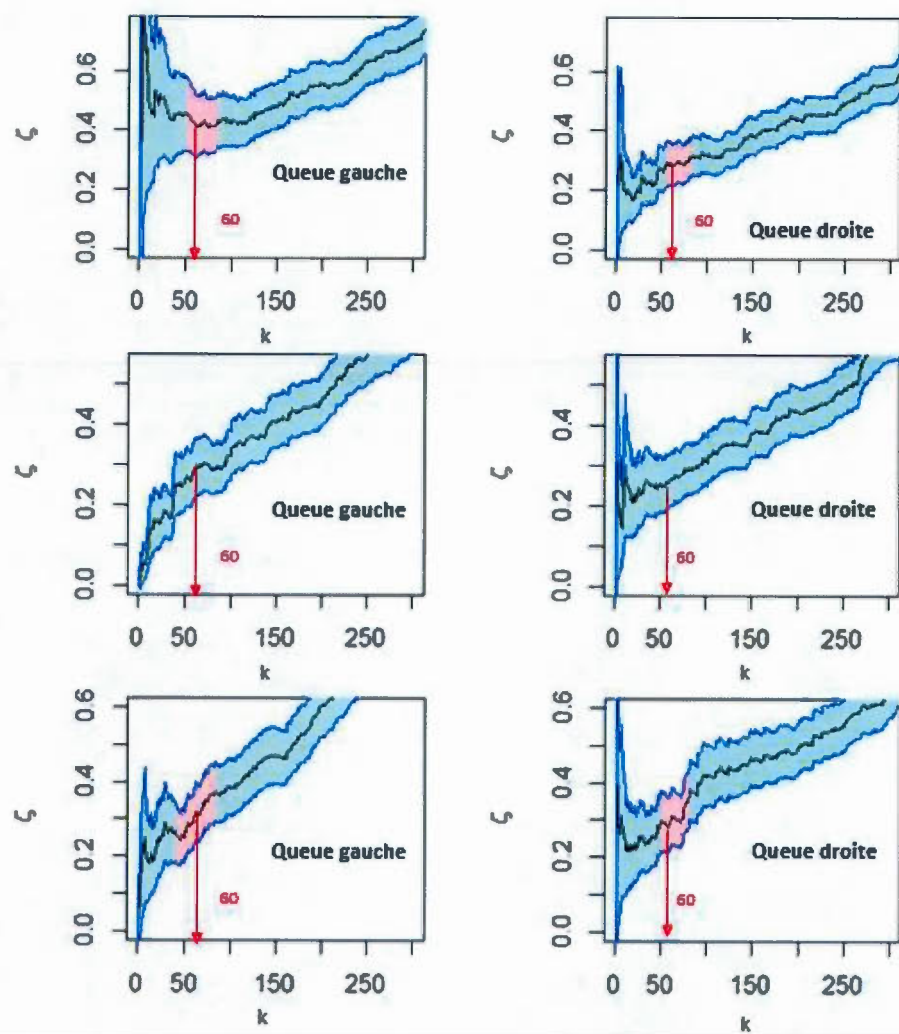


Figure E.2 : Graphique de Hill des résidus standardisés - Période 2 à 4

Tableau E.1 : Analyse de sensibilité à k de la VaR^{GPD_C} - Période 2 à 4

k	Queue droite			Queue gauche		
	u	$VaR_{99\%}^{GPD_C}$	$VaR_{95\%}^{GPD_C}$	u	$VaR_{1\%}^{GPD_C}$	$VaR_{5\%}^{GPD_C}$
20	1.290	7.358	5.031	1.300	-14.482	-6.034
30	0.940	7.310	5.033	0.937	-13.706	-6.372
40	0.782	7.432	5.009	0.773	-13.490	-6.421
50	0.610	7.404	5.050	0.618	-13.267	-6.491
60	0.465	7.411	5.081	0.487	-12.990	-6.557
70	0.334	7.915	5.506	0.340	-12.544	-6.623
80	0.209	7.297	5.194	0.218	-12.087	-6.706
20	1.050	8.957	6.020	1.050	-7.224	-5.666
30	1.049	8.515	5.939	1.049	-8.029	-6.262
40	0.825	8.663	5.830	0.885	-8.144	-6.182
50	0.647	8.589	5.883	0.698	-8.150	-6.170
60	0.505	8.573	5.920	0.547	-8.220	-6.148
70	0.372	8.508	5.999	0.388	-8.352	-6.147
80	0.238	5.218	3.931	0.239	-8.275	-6.160
20	1.371	5.3275	3.369	1.392	-5.584	-3.787
30	1.058	5.027	3.200	1.070	-5.583	-3.820
40	0.829	5.106	3.163	0.744	-5.596	-3.819
50	0.635	5.058	3.181	0.614	-5.591	-3.845
60	0.479	4.910	3.214	0.472	-5.585	-3.847
70	0.345	4.870	3.230	0.369	-5.566	-3.847
80	0.236	4.815	3.288	0.238	-5.600	-3.838

Tableau E.2 : Statistiques descriptives des paramètres estimés de la VaR^{GPD_C} -
Période 2 à 4

	60	60	60	60
Queue droite - Période 2				
$\hat{\omega}$	0	0	0	0.001
$\hat{\alpha}_1$	0.137	0.205	0	0.999
$\hat{\alpha}_2$	0.035	0.037	0	0.139
$\hat{\xi}$	-6.510	0.123	-0.453	0.140
$\hat{\tau}$	0.681	0.074	0.504	0.901
$VaR_{99\%}^{GPD_C}$	7.411	3.433	46.772	1.236
$VaR_{95\%}^{GPD_C}$	5.081	2.222	31.314	1.006
Queue gauche - Période 2				
$\hat{\omega}$	0	0	0	0.001
$\hat{\alpha}_1$	0.162	0.221	0	0.744
$\hat{\alpha}_2$	0.004	0.004	0	0.149
$\hat{\xi}$	0.122	0.266	-0.383	0.688
$\hat{\tau}$	0.703	0.010	0.549	0.938
$VaR_{1\%}^{GPD_C}$	-12.990	11.454	-99.772	-0.296
$VaR_{5\%}^{GPD_C}$	-6.557	3.626	-35.104	-0.238

	60	60	60	60
Queue droite - Période 3				
$\hat{\omega}$	0	0	0	0.003
$\hat{\alpha}_1$	0.065	0.103	0	0.398
$\hat{\alpha}_2$	0.018	0.030	0	0.129
$\hat{\alpha}_3$	0.004	0.005	0	0.026
$\hat{\alpha}_4$	0.007	0.013	0	0.069
$\hat{\alpha}_5$	0.095	0.108	0	0.660
$\hat{\alpha}_6$	0.039	0.068	0	0.329
$\hat{\zeta}$	-0.142	0.171	-0.578	0.199
$\hat{\iota}$	0.797	0.108	0.596	1.250
$\text{VaR}_{99\%}^{GPDG}$	8.573	7.095	49.663	1.138
$\text{VaR}_{95\%}^{GPDG}$	5.920	4.195	28.839	0.982
Queue gauche - Période 3				
$\hat{\omega}$	0	0	0	0.003
$\hat{\alpha}_1$	0.082	0.113	0	0.416
$\hat{\alpha}_2$	0.017	0.028	0	0.123
$\hat{\alpha}_3$	0.003	0.004	0	0.026
$\hat{\alpha}_4$	0.010	0.017	0	0.076
$\hat{\alpha}_5$	0.106	0.115	0	0.672
$\hat{\alpha}_6$	0.046	0.077	0	0.342
$\hat{\zeta}$	-0.190	0.092	-0.475	0.109
$\hat{\iota}$	0.862	0.119	0.633	1.275
$\text{VaR}_{1\%}^{GPDG}$	-8.220	5.179	-32.586	-2.629
$\text{VaR}_{5\%}^{GPDG}$	-6.148	4.030	-26.486	-1.859

	60	60	60	60
Queue droite - Période 4				
$\hat{\omega}$	0	0	0	0
$\hat{\alpha}_1$	0.106	0.155	0	0.762
$\hat{\alpha}_2$	0.045	0.047	0	0.189
$\hat{\alpha}_3$	0.004	0.007	0	0.022
$\hat{\zeta}$	-0.066	0.239	-0.501	0.326
$\hat{\ell}$	0.688	0.188	0.372	1.145
$\text{VaR}_{99\%}^{GPDG}$	4.910	2.971	0.219	1.373
$\text{VaR}_{95\%}^{GPDG}$	3.214	1.602	11.959	0.778
Queue gauche - Période 4				
$\hat{\omega}$	0	0	0	0
$\hat{\alpha}_1$	0.092	0.150	0	0.741
$\hat{\alpha}_2$	0.048	0.048	0	0.181
$\hat{\alpha}_3$	0.004	0.007	0	0.022
$\hat{\zeta}$	-0.079	0.080	-0.335	0.268
$\hat{\ell}$	0.855	0.113	0.375	1.136
$\text{VaR}_{1\%}^{GPDG}$	-5.585	2.879	-26.931	-1.389
$\text{VaR}_{5\%}^{GPDG}$	-3.847	1.952	-18.420	-0.731

ANNEXE F

RÉSULTATS DE LA VIOLATION DE LA VAR PAR LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

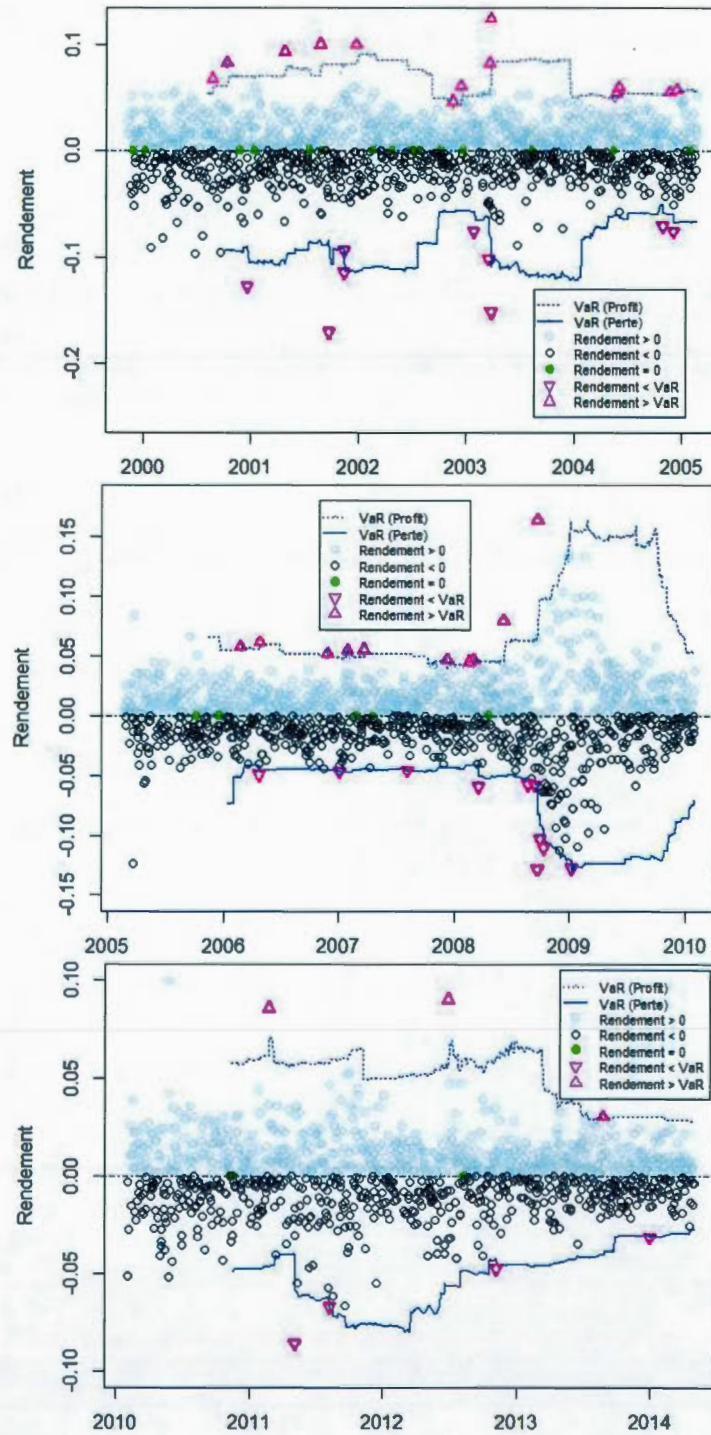


Figure F.1 : Violation de la VaR par la $VaR^{GPD_{NO}}$ - Période 2 à 4

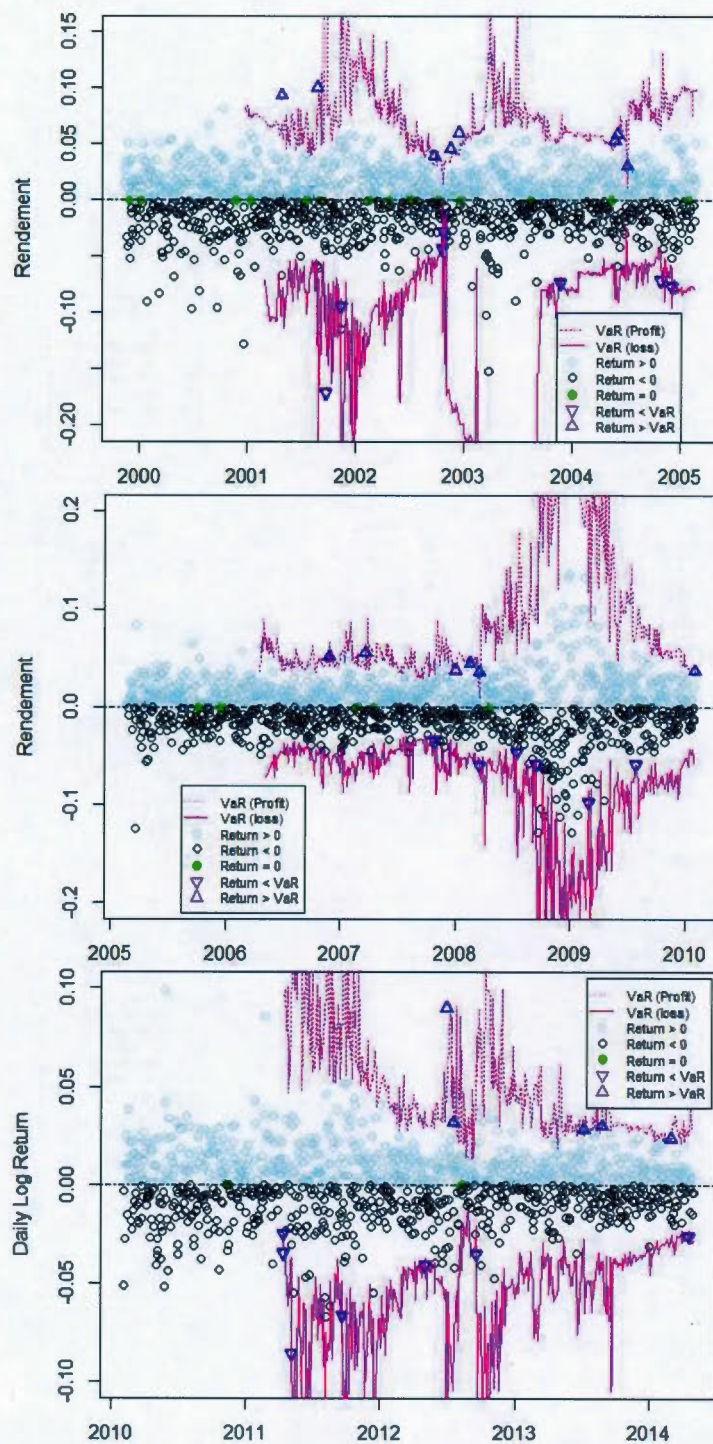


Figure F.2 : Violation de la VaR par la $VaR^{GPD\sigma}$ - Période 2 à 4

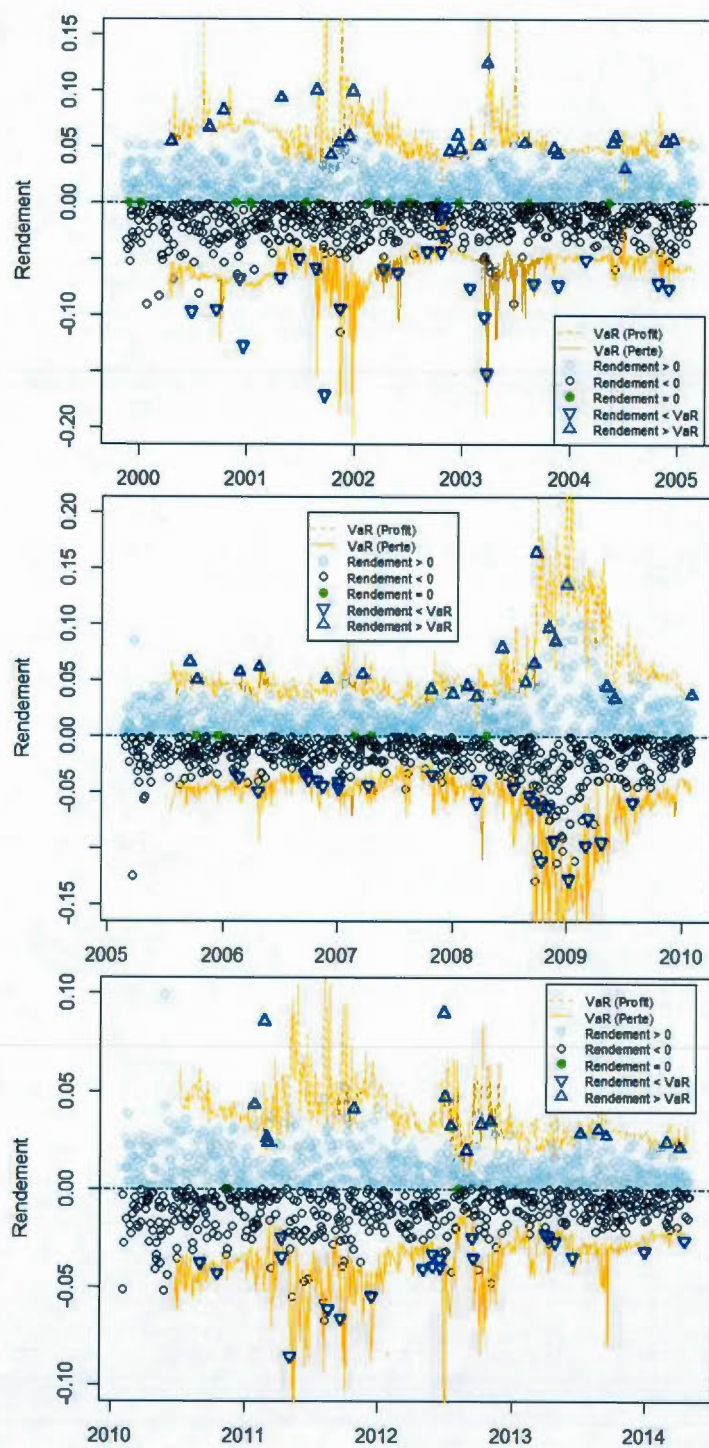


Figure F.3 : Violation de la VaR par la VaR^{CN} - Période 2 à 4

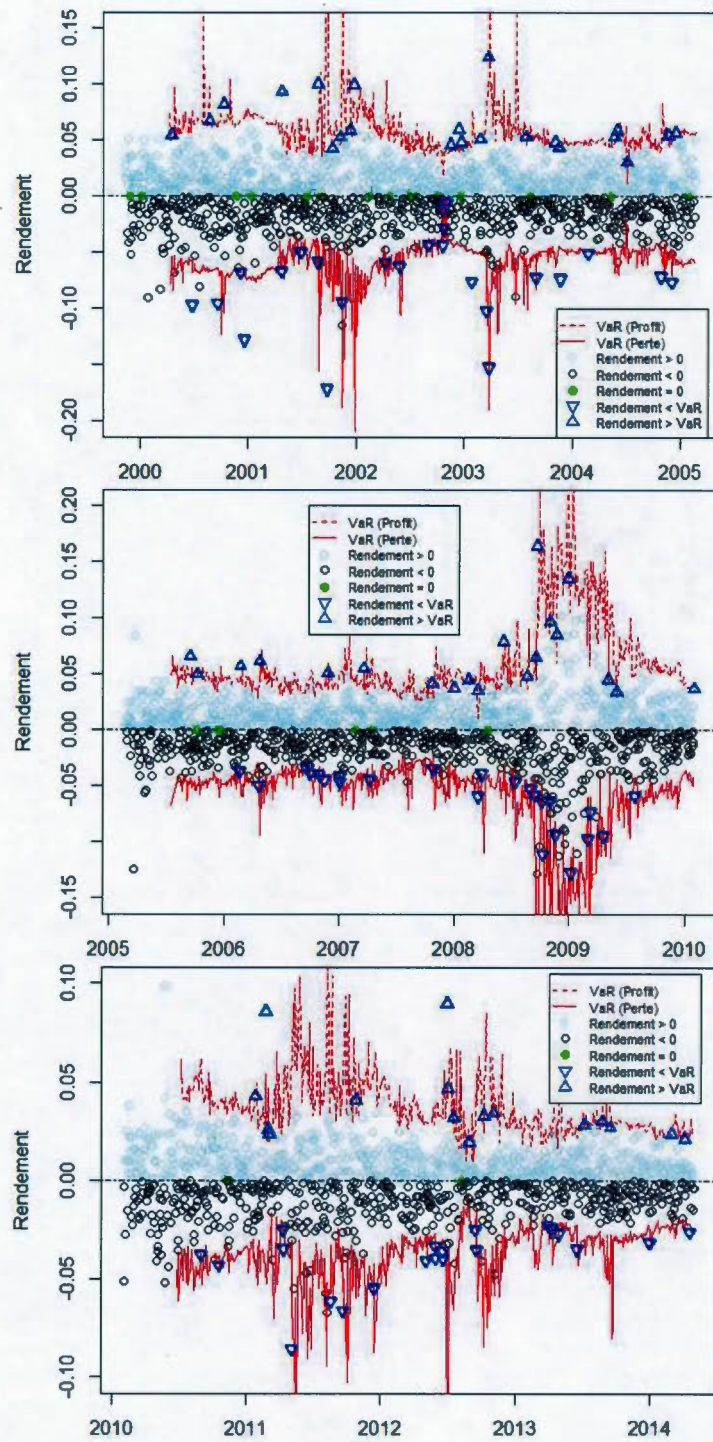


Figure F.4 : Violation de la VaR par la VaR^{CS}_t - Période 2 à 4

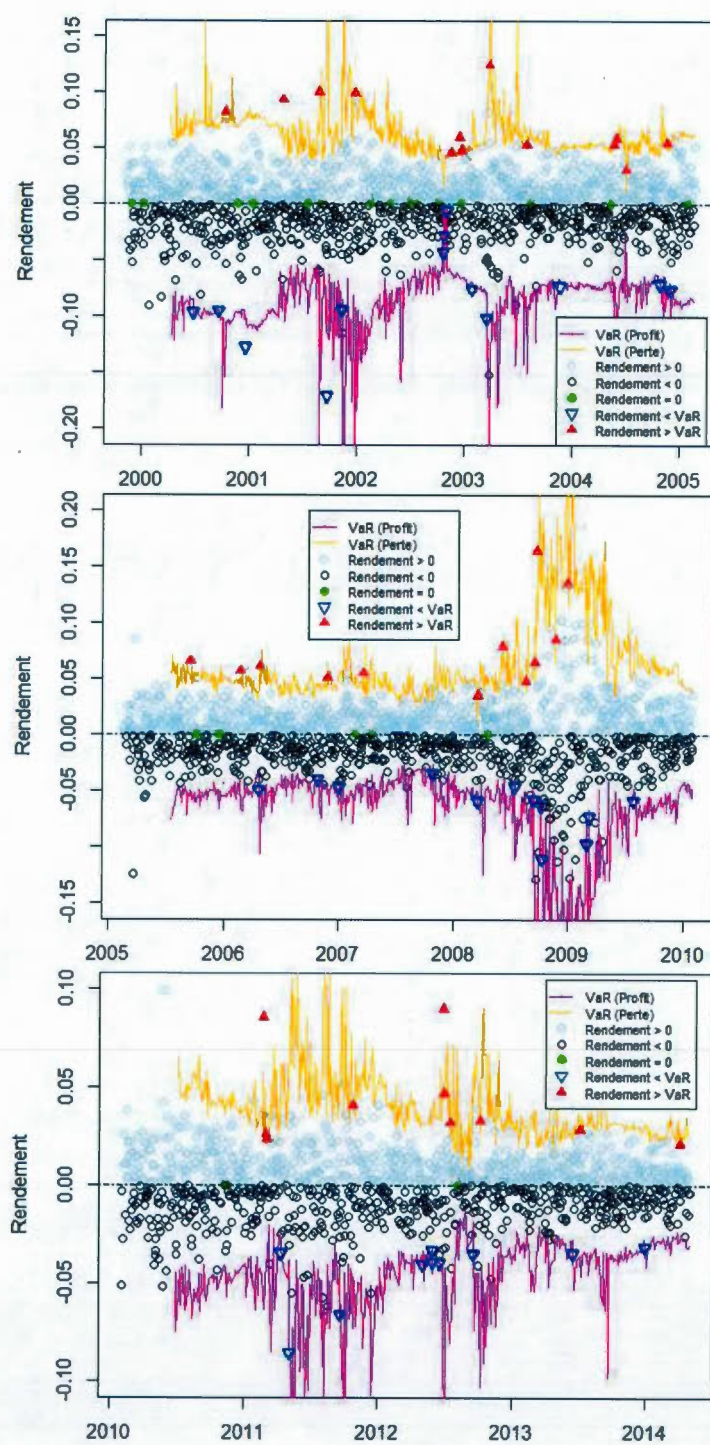


Figure F.5 : Violation de la VaR par la VaR^{HF} - Période 2 à 4

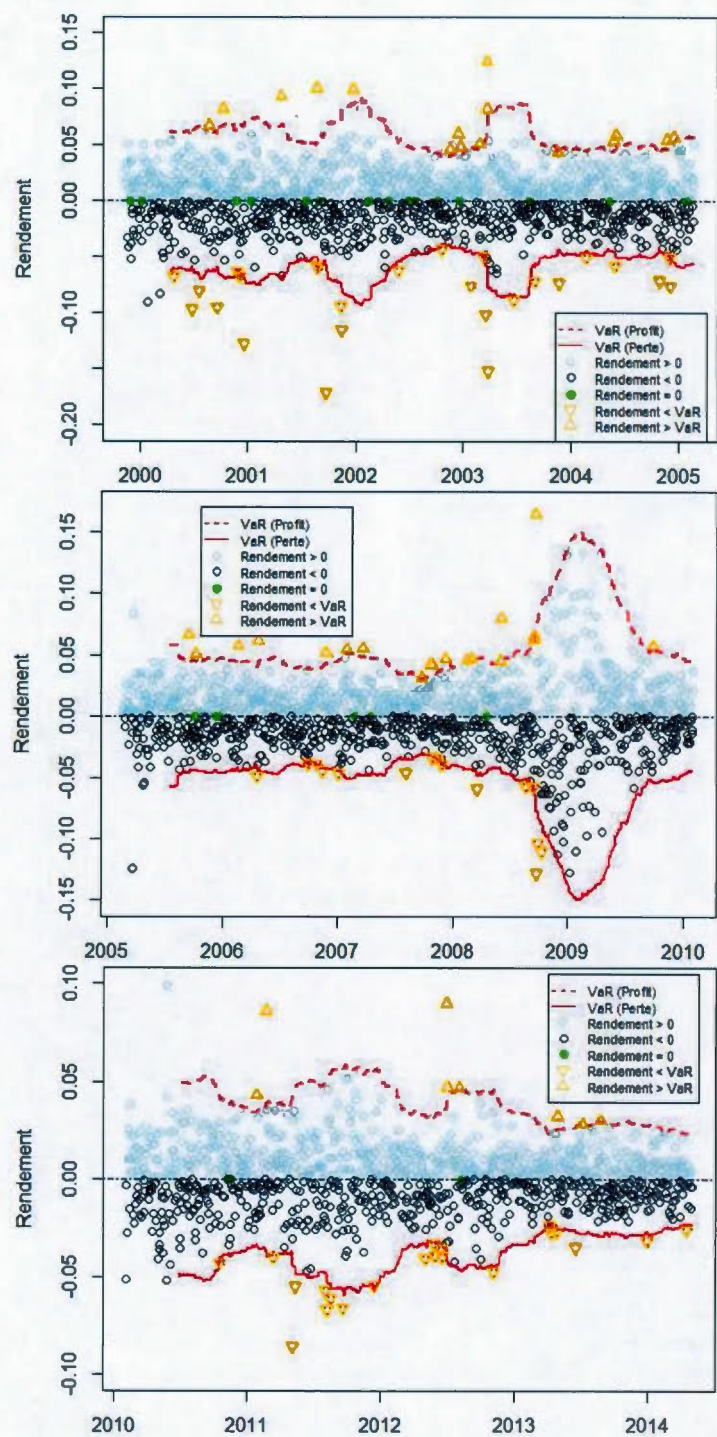


Figure F.6 : Violation de la VaR par la VaR^{NCN} - Période 2 à 4

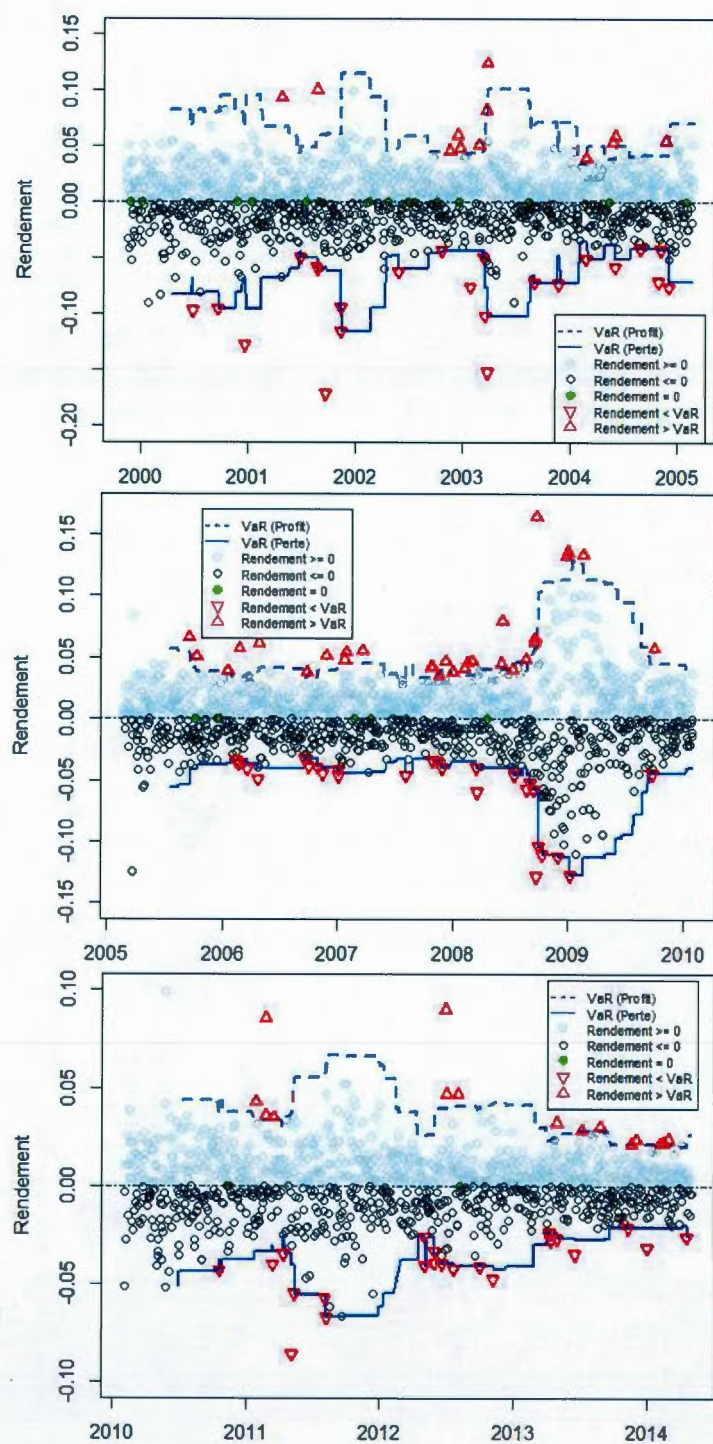


Figure F.7 : Violation de la VaR par la VaR^H - Période 2 à 4

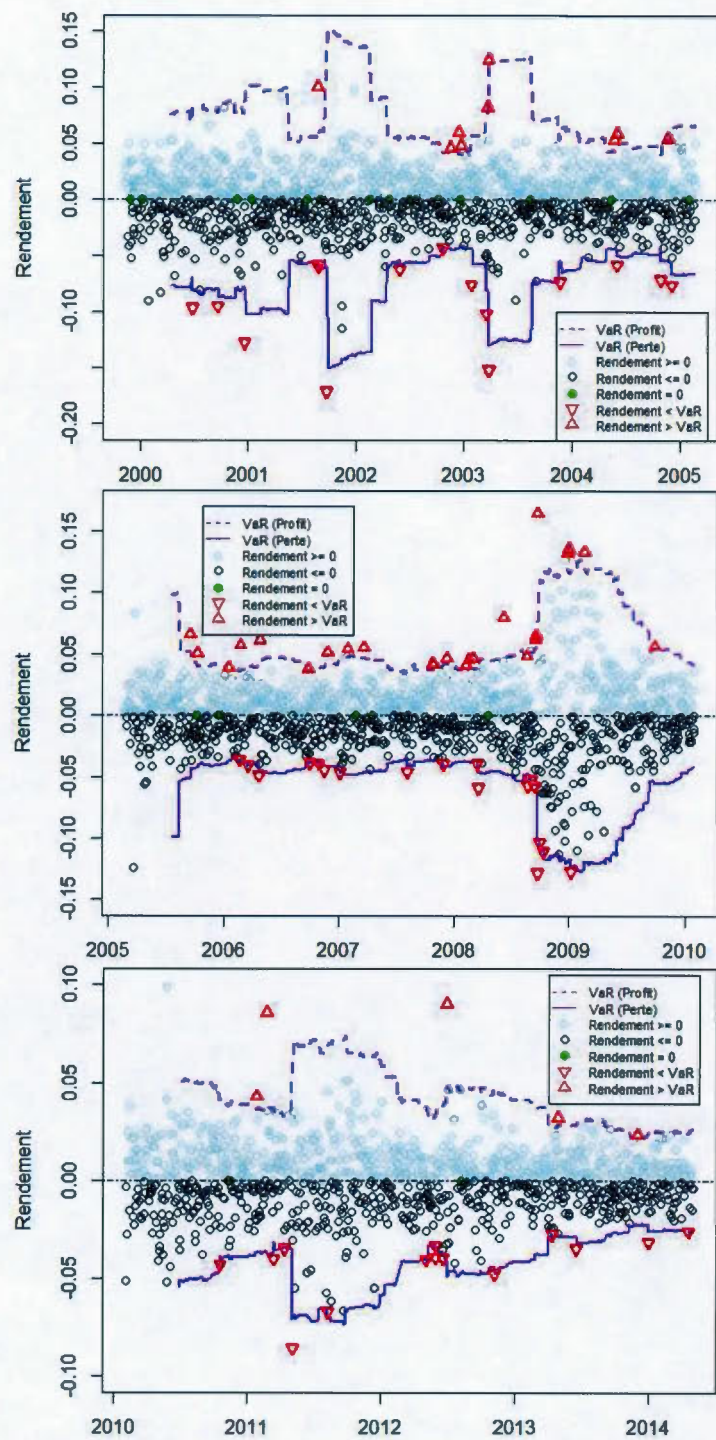


Figure F.8 : Violation de la VaR par la VaR^{CF} - Période 2 à 4

ANNEXE G

RÉSULTATS DES TESTS DE BACKTESTING

Tableau G.1 : Tests de backtesting pour $\alpha = 5\%$ - Période 2

	Queue droite						Queue gauche						χ^2_C		
	CN	HF	GPD _{NC}	GPD _C	N	H	CF	CN	HF	GPD _{NC}	GPD _C	N		H	CF
LR _{UC} ^C	22.720 (0.354)	21.341 (0)	0.404 (0.525)	0.566 (0.452)	18.517 (0)	38.124 (0)	7.682 (0.006)	38.894 (0)	28.612 (0)	0.074 (0.786)	2.114 (0.146)	38.609 (0)	62.642 (0)	36.816 (0)	3.841
J _{UC}	4.207 (0.040)	3.761 (0.052)	11.098 (0)	0.332 (0.564)	6.255 (0.012)	12.011 (0)	5.417 (0.020)	8.441 (0.004)	5.596 (0.018)	5.451 (0.020)	0.027 (0.870)	9.313 (0.002)	15.383 (0)	8.746 (0.003)	3.841
LR _{ind} ^C	0.858 (0.354)	1.881 (0.170)	4.662 (0.031)	3.771 (0.052)	1.401 (0.237)	3.494 (0.062)	0.490 (0.484)	0.096 (0.757)	0.063 (0.803)	8.068 (0.005)	0.221 (0.638)	0.258 (0.612)	1.242 (0.265)	1.883 (0.170)	3.841
LR _{ind} ^{CP}	2.213 (0.137)	2.732 (0.098)	4.257 (0.039)	0.563 (0.453)	0.029 (0.866)	0.577 (0.448)	0.660 (0.417)	1.477 (0.224)	0.982 (0.322)	2.049 (0.152)	0.432 (0.511)	0.069 (0.793)	0.581 (0.446)	0.004 (0.949)	3.841
J _{ind} (2)	0.716 (0.699)	0.438 (0.803)	13.077 (0.001)	0.565 (0.754)	17.690 (0)	32.659 (0)	24.119 (0)	0.025 (0.988)	0.091 (0.956)	8.876 (0.012)	0.173 (0.917)	1.893 (0.388)	0.507 (0.776)	1.579 (0.454)	5.991
J _{ind} (4)	2.580 (0.631)	2.112 (0.715)	13.127 (0.011)	0.667 (0.955)	31.978 (0)	54.334 (0)	40.471 (0)	4.147 (0.386)	5.407 (0.248)	11.627 (0.020)	0.816 (0.936)	4.696 (0.320)	4.881 (0.300)	5.034 (0.284)	9.488
J _{ind} (6)	27.747 (0)	24.878 (0)	29.533 (0)	4.574 (0.599)	94.790 (0)	160.220 (0)	101.528 (0)	19.653 (0.003)	21.529 (0.001)	43.330 (0)	3.299 (0.771)	26.962 (0)	32.490 (0)	29.620 (0)	12.592
LR _{CC} ^C	23.577 (0)	23.223 (0)	5.065 (0.079)	4.337 (0.114)	19.917 (0)	41.617 (0)	8.172 (0.017)	38.990 (0)	28.675 (0)	8.142 (0.017)	2.335 (0.311)	38.867 (0)	63.883 (0)	38.699 (0)	5.991
DB	8.160 (0.017)	10.501 (0.005)	17.654 (0)	15.362 (0)	12.313 (0.002)	7.699 (0.021)	14.176 (0)	15.709 (0)	14.137 (0)	11.818 (0.003)	15.959 (0)	7.868 (0.020)	9.491 (0.009)	15.900 (0)	5.991
J _{CC} (2)	8.414 (0.015)	7.523 (0.023)	22.197 (0)	0.665 (0.717)	12.510 (0.002)	24.023 (0)	10.834 (0.004)	16.882 (0)	11.193 (0.004)	10.902 (0.004)	0.054 (0.973)	18.625 (0)	30.766 (0)	17.493 (0)	5.991
J _{CC} (4)	19.389 (0)	17.562 (0.002)	24.324 (0)	1.751 (0.781)	23.777 (0)	49.569 (0)	15.497 (0.004)	36.797 (0)	26.718 (0)	16.878 (0.002)	0.307 (0.989)	41.758 (0)	62.917 (0)	39.720 (0)	9.488
J _{CC} (6)	31.881 (0)	29.152 (0)	54.948 (0)	5.337 (0.501)	37.033 (0)	74.776 (0)	31.377 (0)	57.926 (0)	45.903 (0)	58.720 (0)	2.836 (0.829)	67.045 (0)	93.425 (0)	64.747 (0)	12.592

Le terme entre parenthèses représente le p-value

Tableau G.2 : Tests de backtesting pour $\alpha = 1\%$ - Période 2

	Queue droite						Queue gauche						χ^2_C		
	CN	HF	GPD _{NC}	GPD _C	N	H	CF	CN	HF	GPD _{NC}	GPD _C	N		H	CF
LR _{UC} ^C	23.121 (0)	5.128 (0.024)	6.022 (0.014)	1.082 (0.298)	9.966 (0.002)	3.762 (0.052)	0.867 (0.352)	35.300 (0)	6.675 (0.010)	2.200 (0.138)	0.978 (0.323)	38.189 (0)	29.370 (0)	10.190 (0.001)	3.841
J _{UC}	6.053 (0.014)	0.735 (0.391)	1.304 (0.254)	0.446 (0.504)	2.102 (0.147)	0.852 (0.356)	0.158 (0.691)	9.116 (0.003)	1.314 (0.252)	0.557 (0.456)	0.012 (0.913)	10.007 (0.002)	7.425 (0.006)	2.055 (0.152)	3.841
LR _{ind} ^C	1.549 (0.213)	0.533 (0.465)	1.196 (0.274)	0.240 (0.624)	0.698 (0.404)	1.561 (0.212)	2.591 (0.107)	0.699 (0.403)	0.597 (0.440)	2.218 (0.136)	0.212 (0.645)	2.295 (0.130)	1.080 (0.299)	0.725 (0.395)	3.841
LR _{ind} ^{CP}	0.019 (0.889)	0.205 (0.651)	0.096 (0.756)	0.601 (0.438)	0.142 (0.706)	2.483 (0.115)	3.537 (0.060)	0.780 (0.377)	0.113 (0.737)	0.947 (0.331)	0.032 (0.858)	0.174 (0.677)	1.073 (0.300)	0.957 (0.328)	3.841
J _{ind} (2)	0.154 (0.926)	0.815 (0.665)	0.037 (0.982)	0.278 (0.870)	0.210 (0.900)	0.211 (0.900)	0.072 (0.965)	1.022 (0.600)	0.121 (0.941)	0.419 (0.811)	0.562 (0.755)	0.149 (0.928)	1.666 (0.435)	1.133 (0.568)	5.991
J _{ind} (4)	1.806 (0.771)	1.558 (0.816)	1.619 (0.805)	2.260 (0.688)	2.109 (0.716)	3.418 (0.490)	3.355 (0.500)	1.763 (0.779)	1.700 (0.791)	2.902 (0.574)	1.174 (0.882)	1.669 (0.796)	2.755 (0.600)	1.920 (0.750)	9.488
J _{ind} (6)	8.420 (0.209)	5.793 (0.447)	5.492 (0.482)	5.366 (0.498)	9.173 (0.164)	9.243 (0.160)	10.320 (0.112)	7.263 (0.297)	5.751 (0.452)	6.772 (0.342)	4.825 (0.566)	8.565 (0.200)	9.404 (0.152)	6.327 (0.388)	12.592
LR _{CC} ^C	24.670 (0)	5.662 (0.059)	7.218 (0.027)	1.322 (0.516)	10.664 (0.005)	5.323 (0.070)	3.459 (0.177)	35.999 (0)	7.272 (0.026)	4.419 (0.110)	1.190 (0.552)	40.484 (0)	30.450 (0)	10.914 (0.004)	5.991
DB	4.019 (0.134)	1.123 (0.570)	9.542 (0.008)	17.558 (0)	3.506 (0.173)	10.413 (0.005)	9.038 (0.011)	14.654 (0)	12.847 (0.002)	6.045 (0.049)	11.374 (0.003)	3.979 (0.137)	13.403 (0.001)	9.491 (0.009)	5.991
J _{CC} (2)	12.107 (0.002)	1.471 (0.479)	2.607 (0.272)	0.892 (0.640)	4.203 (0.122)	1.704 (0.427)	0.316 (0.854)	18.232 (0)	2.628 (0.269)	1.113 (0.573)	0.024 (0.988)	20.014 (0)	14.849 (0)	4.110 (0.128)	5.991
J _{CC} (4)	23.722 (0)	3.462 (0.484)	6.437 (0.169)	3.382 (0.496)	8.892 (0.064)	5.524 (0.238)	3.123 (0.537)	33.873 (0)	6.005 (0.199)	4.220 (0.377)	0.565 (0.967)	37.653 (0)	27.426 (0)	7.996 (0.092)	9.488
J _{CC} (6)	33.809 (0)	5.990 (0.424)	11.394 (0.077)	7.474 (0.279)	13.886 (0.031)	12.013 (0.062)	9.880 (0.130)	45.091 (0)	10.083 (0.121)	9.637 (0.141)	2.456 (0.873)	51.109 (0)	36.239 (0)	11.262 (0.081)	12.592

Le terme entre parenthèses représente le p-value

Tableau G.3 : Tests de backtesting pour $\alpha = 5\%$ - Période 3

	Queue droite					Queue gauche					χ^2_C			
	CN	HF	GPD _{NC}	GPD _C	N	H	CF	CN	HF	GPD _{NC}		GPD _C	N	H
LR _{UC} ^C	41.406 (0)	23.106 (0)	1.200 (0.273)	0.207 (0.649)	35.995 (0)	37.765 (0)	47.111 (0)	32.660 (0)	26.084 (0)	4.326 (0.038)	0.410 (0.522)	41.693 (0)	55.752 (0)	53.647 (0)
J _{UC}	2.127 (0.145)	0.390 (0.532)	3.748 (0.053)	0.300 (0.584)	3.935 (0.047)	5.230 (0.022)	5.731 (0.017)	2.976 (0.085)	1.725 (0.189)	2.946 (0.086)	0.223 (0.636)	4.308 (0.038)	8.257 (0.004)	6.571 (0.010)
LR _{ind} ^C	0.163 (0.686)	0.634 (0.426)	6.288 (0.012)	0.002 (0.965)	0.081 (0.776)	0.347 (0.556)	0.240 (0.624)	1.639 (0.200)	1.662 (0.197)	6.417 (0.011)	0.190 (0.663)	2.302 (0.129)	4.651 (0.031)	5.130 (0.024)
LR _{ind} ^{CP}	3.165 (0.075)	2.979 (0.084)	9.305 (0.002)	2.778 (0.096)	0.017 (0.895)	0.109 (0.741)	0.015 (0.902)	0.184 (0.668)	0.410 (0.522)	8.189 (0.004)	0.046 (0.831)	0.155 (0.694)	0.068 (0.794)	0.011 (0.915)
J _{ind} (2)	0.637 (0.727)	0.890 (0.641)	8.186 (0.017)	1.361 (0.506)	2.821 (0.244)	5.250 (0.072)	3.003 (0.223)	0.058 (0.972)	0.073 (0.964)	5.341 (0.069)	0.587 (0.746)	0.303 (0.859)	1.878 (0.391)	0.706 (0.702)
J _{ind} (4)	0.915 (0.922)	1.191 (0.880)	12.111 (0.017)	1.847 (0.764)	3.127 (0.537)	6.352 (0.174)	3.255 (0.516)	0.148 (0.997)	0.085 (0.999)	11.339 (0.023)	0.853 (0.931)	1.037 (0.904)	2.249 (0.690)	2.297 (0.681)
J _{ind} (6)	1.214 (0.976)	1.647 (0.949)	12.883 (0.045)	1.930 (0.926)	6.064 (0.416)	6.773 (0.342)	3.729 (0.713)	0.197 (1)	0.092 (1)	13.540 (0.035)	1.574 (0.954)	1.201 (0.977)	2.985 (0.811)	3.295 (0.771)
LR _{CC} ^C	41.569 (0)	23.740 (0)	7.488 (0.024)	0.210 (0.901)	36.076 (0)	38.112 (0)	47.351 (0)	34.300 (0)	27.747 (0)	10.743 (0.005)	0.600 (0.741)	43.995 (0)	60.404 (0)	58.778 (0)
DB	0.777 (0.678)	1.561 (0.458)	6.620 (0.037)	5.408 (0.067)	2.493 (0.288)	2.023 (0.364)	0.303 (0.860)	10.146 (0.006)	9.393 (0.009)	7.105 (0.029)	8.573 (0.014)	3.541 (0.170)	5.224 (0.073)	5.185 (0.075)
J _{CC} (2)	9.665 (0.008)	3.354 (0.187)	8.167 (0.017)	1.532 (0.465)	12.538 (0.002)	14.812 (0.001)	17.173 (0)	11.086 (0.004)	7.621 (0.022)	6.640 (0.036)	0.267 (0.875)	14.819 (0.001)	24.093 (0)	20.767 (0)
J _{CC} (4)	12.331 (0.015)	3.767 (0.438)	13.944 (0.007)	1.832 (0.767)	18.315 (0.001)	23.242 (0)	26.101 (0)	15.206 (0.004)	9.830 (0.043)	12.440 (0.014)	0.538 (0.970)	21.048 (0)	36.968 (0)	30.637 (0)
J _{CC} (6)	12.506 (0.052)	3.769 (0.708)	15.437 (0.017)	2.002 (0.920)	19.558 (0.003)	26.297 (0)	29.170 (0)	15.890 (0.014)	10.003 (0.125)	17.204 (0.009)	0.800 (0.992)	22.618 (0.001)	41.367 (0)	33.725 (0)

Le terme entre parenthèses représente le p-value

Tableau G.4 : Tests de backtesting pour $\alpha = 1\%$ - Période 3

	Queue droite						Queue gauche						χ^2_C		
	CN	HF	GPD _{NC}	GPD _C	N	H	CF	CN	HF	GPD _{NC}	GPD _C	N		H	CF
LR _{CC} ^C	21.072 (0)	4.945 (0.026)	3.078 (0.079)	0.266 (0.606)	18.627 (0)	47.244 (0)	31.842 (0)	33.604 (0)	5.542 (0.019)	3.833 (0.050)	0.399 (0.528)	10.885 (0.001)	39.722 (0)	17.468 (0)	3.841
J _{CC}	2.254 (0.133)	0.698 (0.403)	0.278 (0.598)	0.002 (0.963)	2.904 (0.088)	9.214 (0.020)	5.389 (0.020)	6.067 (0.014)	0.188 (0.664)	0.436 (0.509)	0.084 (0.772)	2.655 (0.103)	7.781 (0.005)	3.712 (0.054)	3.841
LR _{ind} ^C	0.178 (0.673)	1.401 (0.237)	0.375 (0.541)	0.126 (0.723)	2.165 (0.141)	0.224 (0.636)	0 (0.984)	0 (0.976)	0.526 (0.468)	0.406 (0.524)	0.159 (0.690)	0.826 (0.363)	2.149 (0.143)	0.272 (0.602)	3.841
LR _{ind} ^{CP}	0.519 (0.471)	0.156 (0.693)	0.098 (0.754)	0.005 (0.944)	0.686 (0.407)	0.759 (0.384)	0.029 (0.865)	0.003 (0.954)	0.112 (0.738)	0.449 (0.503)	0.580 (0.446)	2.619 (0.106)	1.959 (0.162)	2.448 (0.118)	3.841
J _{ind} (2)	0.283 (0.868)	0.018 (0.991)	0.232 (0.890)	0.044 (0.978)	0.734 (0.693)	2.497 (0.287)	0.216 (0.898)	0.034 (0.983)	0.657 (0.720)	0.037 (0.982)	0.370 (0.831)	0.483 (0.786)	3.884 (0.143)	0.352 (0.839)	5.991
J _{ind} (4)	0.324 (0.988)	0.019 (1)	0.803 (0.938)	0.145 (0.997)	1.665 (0.797)	4.027 (0.402)	0.494 (0.974)	0.164 (0.997)	1.033 (0.905)	0.072 (0.999)	0.863 (0.930)	1.274 (0.866)	7.842 (0.098)	1.432 (0.839)	9.488
J _{ind} (6)	0.357 (0.999)	0.072 (1)	1.418 (0.965)	0.176 (1)	1.741 (0.942)	4.409 (0.622)	0.604 (0.996)	0.213 (1)	1.242 (0.975)	0.600 (0.996)	1.464 (0.962)	2.653 (0.851)	8.041 (0.235)	4.013 (0.675)	12.592
LR _{CC} ^C	21.250 (0)	6.346 (0.042)	3.452 (0.178)	0.392 (0.822)	20.792 (0)	47.467 (0)	31.842 (0)	33.605 (0)	6.068 (0.048)	4.239 (0.120)	0.558 (0.756)	11.710 (0.003)	41.871 (0)	17.740 (0)	5.991
DB	0.849 (0.654)	1.513 (0.469)	8.123 (0.017)	18.566 (0)	7.022 (0.030)	1.115 (0.573)	0.558 (0.756)	2.469 (0.291)	3.473 (0.176)	0.765 (0.682)	3.469 (0.177)	3.253 (0.197)	4.304 (0.116)	1.146 (0.564)	5.991
J _{CC} (2)	7.128 (0.028)	2.533 (0.282)	1.535 (0.464)	0.002 (0.999)	8.087 (0.018)	22.378 (0)	14.178 (0.001)	15.697 (0)	1.327 (0.515)	1.851 (0.396)	0.087 (0.957)	7.258 (0.027)	19.015 (0)	9.917 (0.007)	5.991
J _{CC} (4)	10.371 (0.035)	3.493 (0.479)	1.828 (0.767)	0.030 (1)	12.740 (0.013)	38.235 (0)	22.924 (0)	25.584 (0)	1.517 (0.824)	2.401 (0.662)	0.352 (0.986)	11.533 (0.021)	32.425 (0)	15.927 (0.003)	9.488
J _{CC} (6)	10.936 (0.090)	3.620 (0.728)	1.948 (0.924)	0.084 (1)	14.706 (0.023)	46.957 (0)	26.449 (0)	29.532 (0)	1.592 (0.953)	2.441 (0.875)	0.844 (0.991)	13.390 (0.037)	40.089 (0)	18.492 (0.005)	12.592

Le terme entre parenthèses représente le p-value

Tableau G.5 : Tests de backtesting pour $\alpha = 5\%$ - Période 4

	Queue droite						Queue gauche						χ^2_C		
	CN	HF	GPD _{NC}	GPD _C	N	H	CF	CN	HF	GPD _{NC}	GPD _C	N		H	CF
LR _{UC} ^C	16.406 (0)	17.772 (0)	0.268 (0.605)	0.272 (0.602)	8.122 (0.004)	7.155 (0.007)	20.532 (0)	46.766 (0)	23.945 (0)	0.089 (0.765)	0.001 (0.971)	25.484 (0)	38.341 (0)	32.577 (0)	3.841
J _{UC}	0.977 (0.323)	0.878 (0.349)	2.549 (0.110)	0.070 (0.791)	0.918 (0.338)	1.108 (0.292)	4.994 (0.025)	2.231 (0.135)	0.723 (0.395)	1.024 (0.312)	1.965 (0.161)	0.884 (0.347)	1.798 (0.180)	2.257 (0.133)	3.841
LR _{ind} ^C	2.830 (0.092)	2.474 (0.116)	3.271 (0.071)	4.388 (0.036)	2.245 (0.134)	2.584 (0.108)	3.421 (0.064)	0.537 (0.464)	0.128 (0.720)	0.014 (0.906)	1.261 (0.261)	1.347 (0.246)	2.510 (0.113)	2.369 (0.124)	3.841
LR _{ind} ^{CP}	0.003 (0.957)	0.043 (0.836)	1.190 (0.275)	0.091 (0.763)	0.216 (0.642)	0.422 (0.516)	1.941 (0.164)	1.371 (0.242)	0.735 (0.391)	0.215 (0.643)	0.759 (0.384)	0.264 (0.607)	0.275 (0.600)	0.002 (0.965)	3.841
J _{ind} (2)	1.047 (0.592)	0.683 (0.711)	2.375 (0.305)	0.064 (0.968)	1.338 (0.512)	2.491 (0.288)	9.921 (0.007)	0.734 (0.693)	0.904 (0.636)	1.151 (0.562)	3.024 (0.221)	1.905 (0.386)	2.688 (0.261)	3.290 (0.193)	5.991
J _{ind} (4)	3.011 (0.556)	1.988 (0.738)	6.011 (0.198)	0.251 (0.993)	3.269 (0.514)	6.657 (0.155)	15.181 (0.004)	2.166 (0.705)	2.415 (0.660)	3.198 (0.525)	8.081 (0.089)	4.777 (0.311)	6.846 (0.144)	8.823 (0.066)	9.488
J _{ind} (6)	3.084 (0.798)	2.005 (0.919)	8.061 (0.234)	0.265 (1)	3.944 (0.684)	8.066 (0.233)	15.482 (0.017)	2.318 (0.888)	2.842 (0.828)	3.481 (0.747)	8.400 (0.210)	6.462 (0.374)	9.161 (0.165)	10.606 (0.101)	12.592
LR _{CC} ^C	19.237 (0)	20.246 (0)	3.538 (0.170)	4.660 (0.097)	10.366 (0.006)	9.738 (0.008)	23.953 (0)	47.303 (0)	24.073 (0)	0.104 (0.950)	1.263 (0.532)	26.831 (0)	40.850 (0)	34.947 (0)	5.991
DB	7.175 (0.028)	6.668 (0.036)	5.625 (0.060)	14.700 (0.001)	3.179 (0.204)	6.553 (0.038)	6.485 (0.039)	7.058 (0.029)	7.819 (0.020)	0.188 (0.910)	9.771 (0.008)	3.626 (0.163)	8.543 (0.014)	4.369 (0.113)	5.991
J _{CC} (2)	4.258 (0.119)	4.432 (0.109)	2.758 (0.252)	0.096 (0.953)	2.639 (0.267)	2.336 (0.311)	12.071 (0.002)	12.864 (0.002)	5.269 (0.072)	1.165 (0.559)	3.024 (0.220)	5.804 (0.055)	10.170 (0.006)	9.686 (0.008)	5.991
J _{CC} (4)	6.678 (0.154)	6.777 (0.148)	7.530 (0.110)	0.254 (0.993)	4.603 (0.330)	4.290 (0.368)	22.764 (0)	19.747 (0)	7.556 (0.109)	3.504 (0.477)	8.051 (0.090)	8.452 (0.076)	15.487 (0.004)	15.497 (0.004)	9.488
J _{CC} (6)	8.141 (0.228)	7.897 (0.246)	8.646 (0.195)	0.265 (1)	6.098 (0.412)	7.053 (0.316)	29.881 (0)	21.768 (0.001)	8.475 (0.205)	3.788 (0.705)	8.387 (0.211)	9.824 (0.132)	17.751 (0.007)	19.087 (0.004)	12.592

Le terme entre parenthèses représente le p-value

Tableau G.6 : Tests de backtesting pour $\alpha = 1\%$ - Période 4

	Queue droite						Queue gauche						χ^2_C		
	CN	HF	GPD _{NC}	GPD _C	N	H	CF	CN	HF	GPD _{NC}	GPD _C	N		H	CF
LR _{UC} ^C	14.851 (0)	3.637 (0.057)	0.698 (0.403)	0.173 (0.677)	1.363 (0.243)	12.563 (0)	0.004 (0.947)	31.721 (0)	4.843 (0.028)	0.001 (0.976)	2.600 (0.107)	31.647 (0)	34.811 (0)	12.601 (0)	3.841
J _{UC}	1.355 (0.244)	0.017 (0.895)	1.662 (0.999)	0 (0.989)	0.375 (0.540)	2.586 (0.037)	0.116 (0.734)	3.052 (0.081)	0.046 (0.831)	0.284 (0.594)	0.487 (0.485)	3.016 (0.082)	3.907 (0.048)	0.274 (0.674)	3.841
LR _{ind} ^C	2.856 (0.091)	6.419 (0.011)	0.039 (0.844)	0.123 (0.726)	2.620 (0.106)	3.305 (0.069)	0.098 (0.754)	0.957 (0.328)	0.447 (0.504)	0.080 (0.778)	2.770 (0.096)	3.183 (0.074)	2.755 (0.097)	0.883 (0.347)	3.841
LR _{ind} ^{CP}	1.447 (0.229)	1.370 (0.242)	9.930 (0.002)	0.018 (0.893)	1.471 (0.225)	4.110 (0.043)	0.307 (0.580)	0.062 (0.803)	0.059 (0.809)	2.540 (0.111)	0.505 (0.477)	0.461 (0.497)	0.684 (0.408)	0.644 (0.422)	3.841
J _{ind} (2)	3.100 (0.212)	1.009 (0.604)	0.386 (0.825)	0.172 (0.918)	0.876 (0.645)	4.440 (0.109)	0.368 (0.832)	0.860 (0.651)	0.305 (0.858)	0.603 (0.740)	1.019 (0.601)	1.522 (0.467)	1.151 (0.563)	0.609 (0.737)	5.991
J _{ind} (4)	7.924 (0.094)	1.851 (0.763)	0.966 (0.915)	0.244 (0.993)	2.093 (0.719)	8.201 (0.084)	0.825 (0.935)	1.872 (0.759)	0.477 (0.976)	1.378 (0.848)	2.682 (0.612)	3.237 (0.519)	3.081 (0.544)	0.873 (0.928)	9.488
J _{ind} (6)	10.019 (0.124)	7.165 (0.306)	1.075 (0.983)	0.911 (0.989)	3.186 (0.785)	8.208 (0.223)	0.863 (0.990)	3.216 (0.781)	2.001 (0.920)	1.470 (0.961)	2.900 (0.821)	7.185 (0.304)	3.883 (0.693)	1.292 (0.972)	12.592
LR _{CC} ^C	17.707 (0)	10.056 (0.007)	0.737 (0.692)	0.296 (0.862)	3.983 (0.137)	15.869 (0)	0.103 (0.950)	32.677 (0)	5.290 (0.071)	0.081 (0.960)	5.371 (0.068)	34.830 (0)	37.566 (0)	13.484 (0.001)	5.991
DB	11.670 (0.003)	12.195 (0.002)	0.047 (0.977)	3.582 (0.167)	3.818 (0.148)	10.986 (0.004)	3.045 (0.218)	7.397 (0.025)	4.762 (0.092)	0.837 (0.658)	8.126 (0.017)	3.561 (0.169)	8.279 (0.016)	5.140 (0.077)	5.991
J _{CC} (2)	5.123 (0.077)	0.471 (0.790)	0.780 (0.677)	0.017 (0.992)	0.893 (0.640)	6.586 (0.037)	0.393 (0.822)	11.101 (0.004)	1.022 (0.600)	0.618 (0.734)	1.147 (0.563)	11.031 (0.004)	12.892 (0.002)	2.975 (0.226)	5.991
J _{CC} (4)	8.559 (0.073)	0.548 (0.969)	1.060 (0.901)	0.049 (1)	1.597 (0.809)	12.143 (0.016)	0.839 (0.933)	19.102 (0.001)	1.297 (0.862)	1.391 (0.846)	2.104 (0.717)	18.956 (0.001)	22.655 (0)	4.224 (0.376)	9.488
J _{CC} (6)	10.618 (0.101)	0.755 (0.993)	1.631 (0.950)	0.311 (0.999)	2.619 (0.854)	16.771 (0.010)	0.890 (0.989)	22.223 (0.001)	1.325 (0.970)	1.470 (0.961)	3.167 (0.788)	22.045 (0.001)	27.268 (0)	4.268 (0.641)	12.592

Le terme entre parenthèses représente le p-value

RÉFÉRENCES

- Akaike, H., (1969). "Fitting Autoregressive Models for Prediction." *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 21, 243-247.
- Akaike, H., (1969). "Statistical Predictor Identification." *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 21, 203-217.
- Akaike, H., (1973). "Maximum Likelihood Estimation of Gaussian Autoregressive Moving Average Models." *Biometrika*, 60, 255-265.
- Akaike, H., (1974). "A New Look at the Statistical Model Identification." *IEEE Transactions on Automatic and Control, Series AC*, 19, 716-723.
- Akaike, H., (1974). "Markovian Representation of Stochastic Processes and its Application to the Analysis of Autoregressive Moving Average Processes." *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 26, 363-387.
- Akaike, H., (1977). "An Entropy Maximisation Principle." in Krishnaiah P.(ed), *Proceedings of Symposium on Applied Statistics*, North Holland.
- Andrews, D.W.K., et Fair, R.C., (1988). "Inference in Nonlinear Econometric Models with Structural Change." *Review of Economic Studies*, 55, 615-640.
- Andrews, D.W.K., et Ploberger, W., (1992). "Optimal Tests When a Nuisance Parameter is Present Only Under the Alternative." *Cowles Foundation Discussion, Yale University*, Paper No.1015.
- Andrews, D.W.K., (1993). "Tests for Parameter Instability and Structural Change With Unknown Change Point." *Econometrica*, 61, 821-856.

- Andrews, D.W.K., et Ploberger, W., (1994). "Optimal Tests When a Nuisance Parameter is Present Only Under the Alternative." *Econometrica*, 62, 1383-1414.
- Bai, J., (1997). "Estimation of a Change Point in Multiple Regression Models." *Review of Economics and Statistics*, 79, 551-563.
- Bai, J., et Perron, P., (2003). "Computation and Analysis of Multiple Structural Change Models." *Journal of Applied Econometrics*, 18, 1-2.
- Baillie, R.T., et Bollerslev, T., (1992). "Prediction in Dynamic Models with Time-Dependent Conditional Variances." *Journal Econometrics*, 52, 91-113.
- Bali, T.G., et Neftci, S.N., (2003). "Disturbing Extremal Behaviour of Spot Price Dynamics." *Journal of Empirical Finance*, 10, 455-477.
- Balkema, A., et De Hann, L., (1974). "Residual Life at Great Age." *Annals of Probability*, 2, 792-804.
- Bao, Y., Lee, T.H., et Saltoglu, B., (2004). "A Test for Density Forecast Comparison with Applications to Risk Management." *Working Paper*.
- Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., et Vosper, L., (1999). "VaR Without Correlations for Nonlinear Portfolios." *Journal of Futures Markets*, 19, 583-602.
- Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., et Vosper, L., (2000). "Filtering Historical Simulation. Backtest Analysis." *Unpublished Manuscript*.
- Barone-Adesi, G., et Giannopoulos, K., (2001). "Non-parametric VaR Techniques. Myths and Realities." *Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA*, 30, 167-181.
- Bauer, P., et Hackl, P., (1995). "The Use of Mosums for Quality Control." *Technometrics*, 20, 431-436.

- Beirlant, J., Goegebeur, Y., Teugels, J., Segers, J., De Waal, D., et Ferro, C., (2004). "Statistics of Extremes. Theory and Applications." *Wiley*.
- Beirlant, J., Dierckx, G., et Guillou, A., (2005). "Estimation of the Extreme-Value Index and Regression on Generalized Quantile Plots." *Wiley*.
- Berkowitz, J., et O'Brien, J., (2002). "How Accurate are the Value-at-Risk Models at Commercial Banks." *Journal of Finance*, 57, 1093-1111.
- Berkowitz, J., Christoffersen, P., et Pelletier, D., (2005). "Evaluating Value-at-Risk Models with Desk-Level Data." *Management Science*, 57, 2213-2227.
- Berkowitz, J., Christoffersen, P., et Pelletier, D., (2009). "Evaluating Value-at-Risk Models with Desk-Level Data." *Management Science*, 57, 2213-2227.
- Berndt, E.K., Hall, B.H., Hall, R.E., et Hausman, J.A., (1974). "Estimation Inference in Nonlinear Structural Models." *Annals of Economic and Social Measurement*, 4, 653-665.
- Black, F., (1976). "Studies of Stock Price Volatility Changes." *Business and Economic Statistics, Proceedings from the American Statistical Association*, Section 177-181.
- Bollerslev, T., (1986). "Generalized Autoregressive Conditionnal Heteroskedasticity." *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- Bontemps, C., (2006). "Moment-Based Tests for Discret Distributions." *Working Paper*.
- Bontemps, C., et Meddahi N., (2005). "Testing Normality : A GMM Approach." *Journal of Econometrics*, 124, 149-186.
- Bontemps, C., et Meddahi N., (2006). "Testing Distributional Assumptions : A GMM Approach." *Working Paper*.

- Box, G.E.P., et Jenkins G.M., (1970). "Time Series Analysis : Forecasting and Control." *San Francisco, Holden Day*.
- Box, G.E.P., Jenkins, G.M., et Reinsel, G.C., (1994). "Time Series Analysis : Forecasting and Control." *Prentice Hall*.
- Box, G.E.P., et Pierce, D.A., (1970). "Distribution of Residual Autocorrelation in ARIMA Time Series Models." *Journal of the American Statistical Association*, 65, 1509-1526.
- Brown, R.L., Durbin, J., et Evans, J.M., (1975). "Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time." *Journal of the Royal Statistical Society*, B 37, 149-192.
- Bystrom, J.Y., (2004). "Managing Extreme Risks in Tranquil and Volatile Markets Using Conditional Extreme Value Theory." *International Review of Financial Analysis*, 13, 133-152.
- Bystrom, J.Y., (2005). "Extreme Value Theory and Extremely Large Electricity Price Changes." *International Review of Economics and Finance*, 14, 41-55.
- Campbell, J.Y., et Hentschel, L., (1992). "No News is Good News : An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns." *Journal of Financial Economics*, 31, 281-318.
- Campbell, S.D., (2007). "A Review of Backtesting and Backtesting Procedures." *Journal of Risk*, 9, 1-19.
- Candelon, B., Colletaz, G., Hurlin C., et Tokpavi, S., (2008). "Backtesting Value-at-Risk : A GMM Duration-Based Test." *Journal of Financial Econometrics*, 9(2), 314-343.

- Chow, G.C., (1960). "Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions." *Econometrica*, 28, 591-605.
- Christoffersen, P.F., (1998). "Evaluating Interval Forecasts." *International Economic Review*, 39, 841-862.
- Christoffersen, P.F., et Pelletier, D., (2004). "Backtesting Value-at-Risk : A Duration-Based Approach." *Journal of Financial Econometrics*, 2, 1, 84-108.
- Chu, C.S.J., Hornik, K., et Kuan, C.M., (1992a). "The Moving-Estimates Test for Parameter Stability." *Econometric Theory*, 11, 669-720.
- Chu, C.S.J., Hornik, K., et Kuan, C.M., (1992b). "MOSUM Tests for Parameter Constancy." *Biometrika*, 82, 603-617.
- Corradi, V., et Swansson, N.R., (2005). "A Test For Comparing Multiple Misspecified Conditional Distributions." *Econometric Theory*, 21, 5, 991-1016.
- Cornish, E.A., et Fisher, R.A., (1937). "Moments and Cumulants in the Specification of Distributions." *Revue de L'Institut International de Statistique*, 5, 307-320.
- Davies, R.B., (1977). "Hypothesis Testing When a Nuisance Parameter is Present Only under the Alternative." *Biometrika*, 64, 247-254.
- Davies, R.B., (1987). "Hypothesis Testing When a Nuisance Parameter is Present Only under the Alternative." *Biometrika*, 74, 33-43.
- Davison, A.C., et Smith, R.L., (1990). "Models for Exceedances Over High Thresholds." *Journal of the Royal Statistical Society, B* 52, 53, 393-442.
- De Gooijer, J.G., Bovas, A., Robinsin, L., et Gould, A., (1985). "Methods for Determing the Order of an ARMA Process : A Survey." *International Statistical Review*, 53(3), 301-329.

- Dufour, J.-M., (1981). "Predictive Tests for Structural Change and the St.Louis Equation." *Département de science économiques et centre de recherche en développement économique, Université de Montréal, Cahier 8054.*
- Dufour, J.-M., (1982). "Recursive Stability Analysis of Linear Regression Relationships : An Exploratory Methodology." *Journal of Econometrics*, 19, 31-76.
- Dumitrescu, E.I., Hurlin, C., et Pham, V., (2012). "Backtesting Value-at-Risk : From Dynamic Quantile to Dynamic Binary Tests." *Finance*, 33, 112.
- Durbin, J., et Watson, G.S., (1950). "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression." *Biometrika*, 37, 409-428.
- Durbin, J., et Watson, G.S., (1951). "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression." *Biometrika*, 38, 159-178.
- Durbin, J., (1960). "The Fitting of Time Series Models." *Review of the International Statistical Institute*, 28, 233-244.
- Durbin, J., (1969). "Tests for Serial Correlation in Regression Analysis Based on the Periodogram of Least-Squares Residuals." *Biometrika*, 56, 1-15.
- Einmahl, J.H.J., et Magnus, J.R., (2008). "Records in Athletics Through Extreme-Value Theory." *Journal of the American Statistical Association*, 103 :484, 1382-1391.
- Einmahl, J.H.J., et Smeets, S.G.W.R., (2011). "Ultimate 100-m World Records Through Extreme-Value Theory." *Statistica Neerlandica Vol.65*, 1, 32-42.
- El-Shagi, M., et Giesen, S., (2013). "Testing for Structural Breaks at Unknown Time : A Steeplechase." *Computational Economics*, 41, (1), 101-123.

- Embrechts, P., Kluppelberg, C., et Mikosch, T., (1997). "Modelling Extremal Events for Insurance and Finance." *Springer*, Berlin.
- Engle, R.F., (1982). "Autoregressive Conditionnal Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation." *Econometrica*, 50(4), 987-1007.
- Engle, R.F., et Kraft, D.F., (1983). "Multiperiod Forecast Error Variances of Inflation Estimated from ARCH Models." in *Zellner A.(ed), Applied Time Series Analysis of Economic Data, Bureau of the Census, Washington D.C.*, 293-302.
- Engle, R.F., et Bollerslev, T., (1986). "Modelling the Persistence of Conditionnal Variances." *Econometric Reviews*, 5, 1-50.
- Engle, R.F., et Manganelli, S., (2004). "CAViaR : Conditional Autoregressive Value-at-Risk by Regression Quantiles." *Journal of Business and Economic Statistics*, 22, 367-381.
- Fisher, R., et Tippett, L., (1928). "Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample." *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24, 180-190.
- Francq, C., et Zakoian, J.-M., (2009). "Modèles GARCH." *Economica*.
- Gençay, R., Selçuk, F., et Ulugulyagci, A., (2003). "High Volatility, Thick Tails and Extreme Value Theory in Value-at-Risk Estimation." *Insurance : Mathematics and Economics*, 33, 337-356.
- Geweke, J., (1989). "Exact Predictive Densities for Linear Models with ARCH Disturbances." *Journal of Econometrics*, 40, 63-86.

- Gnedenko, B., (1943). "Sur la Distribution Limite du Terme Maximum D'une Série Aléatoire." *Annals of Mathematics*, 44, 423-453.
- Gouriéroux, C., (1992). "Modèles ARCH et Applications Financières." *Economica*.
- Gouriéroux, C., et Monfort A., (1995). "Séries Temporelles et Modèles Dynamiques." *Economica*.
- Gouriéroux, C., (2000). "Econometrics of Qualitative Dependent Variables." *Cambridge University Press*.
- Granger, C.W.J., White, H., et Kamstra, M., (1989). "Interval Forecasting : An Analysis Based upon ARCH-quantile Estimators." *Journal of Econometrics*, 40, 87-96.
- Haan, L., et Ferreira, A., (2006). "Extreme Value Theory : An Introduction." *New York : Springer*.
- Hannan, E.J., et Quinn, B., (1979). "The Determination of the Order of an Autoregression." *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 41, 190-191.
- Hannan, E.J., (1980). "The Estimation of the Order of an ARMA Process." *Annals of Statistics*, 8, 1071-1081.
- Hansen, L.P., (1982). "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators." *Econometrica*, 50, 1029-1054.
- Hansen, B.E., (1997). "Approximate Asymptotic p Values for Structural-Change Tests." *Journal of Business Economic Statistics*, 15, 60-67.
- Hawkins, D.L., (1987). "A Test for a Change Point in a Parametric Model Based on a Maximal Wald-type Statistic." *Sankhya*, 49, 368-376.

- Hawkins, D.M., (2001). "Fitting Multiple Change-Point Models to Data." *Computational Statistics Data Analysis*, 37, 323-341.
- Hendricks, D., (1996). "Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data." *Economic Police Review*, 2, 39-70.
- Hill, B.M., (1975). "A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution." *The Annals of Statistics*, 5, 1163-1174.
- Hosking, J.R.M., Wallis, J.R., et Wood E.F., (1985). "Estimation of the Generalized Extreme-Value Distribution by the Method of Probability-Weighted Moment." *Technometrics*, 27, 251-261.
- Hosking, J.R.M., et Wallis, J.R., (1987). "Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution." *Technometrics*, 29, 339-349.
- Hull, J., et White, A., (1998). "Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk." *Journal of Risk*, 1, 5-19.
- Hurlin, C., et Tokpavi, S., (2008). "Une Évaluation des Procédures de Backtesting : Tout va pour le Mieux dans le Meilleur des Mondes." *Finance*, 29, 53-80.
- Jenkinson, A.F., (1955). "The Frequency Distribution of the Annual Maximum, (or Minimum) Values of Meteorological Elements." *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 81, 158-171.
- Jorion, A.F., (2007). "Value-at-Risk : The New Benchmark for Managing Financial Risk." *The McGraw-Hill Companies*.
- Kaarik, M., et Zegulova, A., (2012). "On Estimation of Loss Distributions and Risk Measures." *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, vol. 16.

- Kramer, W., Ploberger, W., et Alt, R., (1988). "Testing for Structural Change in Dynamic Models." *Econometrica*, 56(6), 1355-1369.
- Krehbiel, T., et Adkins, L.S., (2005). "Price Risk in the NYMEX Energy Complex : An Extreme Value Approach." *Journal of Futures Markets*, 25(4), 309-337.
- Kuan, C.M., et Hornik, K., (1995). "The Generalized Fluctuation Test : A Unifying View." *Econometric Reviews*, 14, 135-161.
- Kupiec, P., (1995). "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models." *Journal of Derivatives*, 3, 73-84.
- Lardic, S., et Mignon, V., (2002). "Économétrie des Séries Temporelles Macroéconomiques et Financières." *Economica*.
- Ljung, G.M., et Box, G.E.P., (1978). "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models." *Biometrika*, 65, 297-303.
- Lumsdaine, R.L., (1990). "Asymptotic Properties of the Quasi-Maximum Likelihood Estimation in GARCH(1,1) and IGARCH(1,1) Models." *Working Paper, Harvard University*.
- McNeil, A.J., et Frey, R., (2000). "Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series : An Extreme Value Approach." *Journal of Empirical Finance*, 7, 271-300.
- Mandelbrot, B., (1963). "The Variation of Certain Speculative Prices." *The Journal of Business*, 36(4), 394-419.
- Nelson, D.B., et Foster, D.P., (1994). "Asymptotic Filtering Theory for Univariate ARCH Models." *Econometrica*, 62, 1-41.
- Patton, A.J., (2002). "Application of Copula Theory in Financial Econometrics." *Ph.D. Dissertation*.

- Pickands, J., (1975). "Statistical Inference Using Extreme Order Statistics." *Annals of Statistics*, 3, 119-131.
- Ploberger, W., Kramer, W., et Kontrus, K., (1989). "A New Test for Structural Stability in the Linear Regression Model." *Journal of Econometrics*, 40, 307-318.
- Ploberger, W., et Kramer, W., (1992). "The CUSUM Test With OLS Residuals." *Econometrica*, 60(2), 271-285.
- Quenouille, M.H., (1949). "The Joint Distribution of Serial Correlation Coefficients." *Annals of Mathematical Statistics*, vol.20.
- Reiss, R., et Thomas, M., (1997). "Statistical Analysis of Extreme Value with Applications to Assurance, Finance, Hydrology and Other Fields." *Birkhauser Verlag, Basel*.
- Schotman, P., et Kramer, W., (1992). "Range vs Maximum in OLS-Based Version of CUSUM Test." *Economics Letters*, 40, 379-381.
- Schwarz, G., (1978). "Estimating the Dimension of a Model." *The Annals of Statistics*, 6, 461-464.
- Sen, P.K., (1980). "Asymptotic Theory of Some Tests for a Possible Change in the Regression Slope Occuring at an Unknowing Time Point." *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 52, 203-218.
- Sullivan, J.H., (2002). "Estimating the Locations of Multiple Change Points in the Mean." *Computational Statistics*, 17, 289-296.
- Trabelsi, A., Raggad, B., et Marimoutou, V., (2009). "Extreme Value Theory and Value at Risk : Application to oil market." *Energy Economics*, 31, 519-530.

- Von Mises, R., (1936). "La Distribution de la Plus Grande de n Valeurs." *Reprinted in Selected Papers Volumen II, American Mathematical Society, Providence, R.I.*, 1954, PP.271-294.
- Weiss, A.A., (1982). "Asymptotic Theory for ARCH Models : Stability Estimation and Testing." *Working Paper 82-36, University of California.*
- Weiss, G., (1975). "Time-Reversibility of Linear Stochastic Processes." *Journal of Applied Probability*, 12, 831-836.
- Wold, H., (1938). "A Study in the Analysis of Stationary Time Series." *Uppsala, Almqvist and Wicksell.*
- Zeileis, A., Leisch, F., Hornik, K., et Kleiber, C., (2002). "Strucchange : An R Package for Testing for Structural Change in Linear Regression Models." *Journal of Statistical Software*, 7(2), 1-38.
- Zeileis, A., Kramer, W., Hornik, K., et Kleiber, C., (2003). "Testing and Dating of Structural Changes in Practice." *Computational Statistics and Data Analysis*, 44, 109-123.